

Cálculo II – AD2 (2012/1) - Gabarito

Solução da Questão 1 a)

a) Faça a mudança $u = \sqrt{e^x - 1}$. Fazendo isto, temos

$$du = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} dx = \frac{e^x}{2u} dx \Rightarrow 2u du = e^x dx$$

Desta forma, obtém-se $e^x \underbrace{\sqrt{e^x - 1}}_{=u} dx = 2u^2 du$

Faça a mudança $u = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow u^2 = e^x - 1 \Rightarrow u^2 + 1 = e^x$

Vejamos como mudam os extremos de integração:

$x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{e^0 - 1} = 0$ e $x = \ln 10 \Rightarrow u = \sqrt{e^{\ln 10} - 1} = \sqrt{10 - 1} = 3$. Substituindo na integral, fica:

$$\int_0^{\ln 10} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 8} dx = \int_0^3 \frac{2u^2}{u^2 + 9} du = \int_0^3 \frac{2u^2 + 18 - 18}{u^2 + 9} du = \int_0^3 \left(2 - \frac{18}{u^2 + 9}\right) du \quad (*)$$

Pela tabela de integrais, $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{u}{a}$ logo fazendo $a = 3$ temos $\int \frac{du}{u^2 + 9} = \frac{1}{3} \arctg \frac{u}{3}$

Substituindo em (*) e usando o TFC fica

$$\int_0^{\ln 10} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 8} dx = \int_0^3 \left(2 - \frac{18}{u^2 + 9}\right) du = \left[2u - 6 \arctg \frac{u}{3}\right]_0^3 = [6 - 6 \arctg 1] - 6 \arctg 0 = 6 - 6 \cdot \frac{\pi}{4} = 6 - \frac{3\pi}{2}$$

Solução da Questão 1 b)

Em primeiro lugar, observamos que o integrando não é uma fração própria. Devemos portanto, inicialmente, efetuar a divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r|l} 2x^7 + 37x^5 + x^4 + 171x^3 + 19x^2 + 81 & x^5 + 18x^3 + 81x \\ \hline \text{Resto } x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 81x + 81 & 2x^2 + 1 \end{array}$$

Assim

$2x^7 + 37x^5 + x^4 + 171x^3 + 19x^2 + 81 = (2x^2 + 1)(x^5 + 18x^3 + 81x) + (x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 81x + 81)$ e portanto

$$\frac{2x^7 + 37x^5 + x^4 + 171x^3 + 19x^2 + 81}{x^5 + 18x^3 + 81x} = 2x^2 + 1 + \frac{x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 81x + 81}{x^5 + 18x^3 + 81x}$$

O denominador da última fração pode ser fatorado como

$$x^5 + 18x^3 + 81x = x(x^4 + 18x^2 + 81) = x(x^2 + 9)^2,$$

logo

$$\frac{2x^7 + 37x^5 + x^4 + 171x^3 + 19x^2 + 81}{x^5 + 18x^3 + 81x} = 2x^2 + 1 + \frac{x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 81x + 81}{x(x^2 + 9)^2} \quad (a)$$

Vamos decompor esta última fração em frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 81x + 81}{x(x^2 + 9)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 9} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 9)^2} = \\ &= \frac{A(x^2 + 9)^2 + x.(Bx + C)(x^2 + 9) + x(Dx + E)}{x(x^2 + 9)^2} = \\ &= \frac{(A + B)x^4 + Cx^3 + (18A + 9B + D)x^2 + (9C + E)x + 81A}{x(x^2 + 9)^2} \end{aligned}$$

Igualando os numeradores, devemos ter

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ C = -9 \\ 18A + 9B + D = 19 \\ 9C + E = -81 \\ 81A = 81 \Rightarrow A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ E = 0 \end{cases} \Rightarrow D = 1$$

Logo

$$\frac{x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 81x + 81}{x(x^2 + 9)^2} = \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2 + 9} + \frac{x}{(x^2 + 9)^2}.$$

Substituindo em (a), fica:
Fundação CECIERJ

Consórcio CEDERJ

$$\frac{2x^7 + 37x^5 + x^4 + 171x^3 + 19x^2 + 81}{x^5 + 18x^3 + 81x} = 2x^2 + 1 + \frac{1}{x} - \frac{9}{x^2 + 9} + \frac{x}{(x^2 + 9)^2}$$

De volta a integral indefinida, temos portanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^7 + 37x^5 + x^4 + 171x^3 + 19x^2 + 81}{x^5 + 18x^3 + 81x} dx &= \int (2x^2 + 1) dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{9}{x^2 + 9} dx + \int \frac{x}{(x^2 + 9)^2} dx = \\ &= \frac{2}{3} x^3 + x + \ln |x| - \underbrace{\int \frac{9}{x^2 + 9} dx}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{x}{(x^2 + 9)^2} dx}_{(2)} \quad (*) \end{aligned}$$

Na integral (1), segue do item anterior que

$$\int \frac{9}{x^2 + 9} dx = 9 \cdot \frac{1}{3} \arctg\left(\frac{x}{3}\right) = 3 \arctg\left(\frac{x}{3}\right)$$

Na integral (2), podemos usar a substituição simples $u = x^2 + 9 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$ e fica

$$\underbrace{\int \frac{x}{(x^2 + 9)^2} dx}_{(2)} = \int \frac{du}{2u^2} = -\frac{1}{2u} = -\frac{1}{2(x^2 + 9)}$$

Substituindo em (*), tem-se

$$\int \frac{2x^7 + 37x^5 + x^4 + 171x^3 + 19x^2 + 81}{x^5 + 18x^3 + 81x} dx = \frac{2}{3} x^3 + x + \ln |x| - 3 \arctg\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2(x^2 + 9)} + C$$

Solução da Questão 2 a)

Por definição, para um valor de $s \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos 2t dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} \cos 2t dt \quad (*)$$

Pelo que foi visto no caderno didático, uma condição necessária para a convergência da integral é que a função $f(t) = e^{-st} \cos 2t$ satisfaça $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Se $s = 0$, então $f(t) = \cos 2t$ e não existe, portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Se $s < 0$, então $-s > 0$. Daí $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} = +\infty$ e daí também não existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} \cos 2t$.

Em particular, se $s \leq 0$, a integral é divergente.

Resta o caso $s > 0$.

Calculemos, para um valor de $T > 0$ fixado, a integral definida em (*). inicialmente, obtenhamos a primitiva

$$\int e^{-st} \cos 2t \, dt .$$

Usando integração por partes, façamos

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \cos 2t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -se^{-st} dt \\ v = \frac{\sin 2t}{2} \end{cases}$$

Assim

$$\underbrace{\int e^{-st} \cos 2t \, dt}_{(I)} = e^{-st} \frac{\sin 2t}{2} - \int -se^{-st} \frac{\sin 2t}{2} dt = e^{-st} \frac{\sin 2t}{2} + \frac{s}{2} \underbrace{\int e^{-st} \sin 2t \, dt}_{(II)} \quad (**)$$

Usando integração por partes novamente, agora em (II), façamos:

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \sin 2t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -se^{-st} dt \\ v = -\frac{\cos 2t}{2} \end{cases}$$

$$\text{a integral (II) fica } \int e^{-st} \sin 2t \, dt = -\underbrace{e^{-st} \frac{\cos 2t}{2}}_{(I)} - \int se^{-st} \frac{\cos 2t}{2} dt = -e^{-st} \frac{\cos 2t}{2} - \frac{s}{2} \underbrace{\int e^{-st} \cos 2t \, dt}_{(I)} .$$

Substituindo em (**), fica:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int e^{-st} \cos 2t \, dt}_{(I)} &= e^{-st} \frac{\sin 2t}{2} + \frac{s}{2} \left[-e^{-st} \frac{\cos 2t}{2} - \frac{s}{2} \underbrace{\int e^{-st} \cos 2t \, dt}_{(I)} \right] \\ \Rightarrow \underbrace{\int e^{-st} \cos 2t \, dt}_{(I)} &= e^{-st} \frac{\sin 2t}{2} - \frac{s}{4} e^{-st} \cos 2t - \frac{s^2}{4} \underbrace{\int e^{-st} \cos 2t \, dt}_{(I)} \end{aligned}$$

Isolando no lado esquerdo os termos comuns contendo a integral (I), fica:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{s^2}{4}\right) \underbrace{\int e^{-st} \cos 2t \, dt}_{(I)} &= e^{-st} \frac{\sin 2t}{2} - \frac{s}{4} e^{-st} \cos 2t = \frac{e^{-st}}{4} [2\sin 2t - s \cos 2t] \\ \Rightarrow \underbrace{\int e^{-st} \cos 2t \, dt}_{(I)} &= \frac{e^{-st}}{s^2 + 4} [2\sin 2t - s \cos 2t] \end{aligned}$$

Assim, usando o TFC, a integral definida em (*) fica

$$\underbrace{\int_0^T e^{-st} \cos 2t \, dt}_{(I)} = \frac{e^{-st}}{s^2 + 4} [2s \sin 2t - s \cos 2t] \Big|_{t=0}^{t=T} =$$

$$\frac{e^{-sT}}{s^2 + 4} [2s \sin 2T - s \cos 2T] - \frac{e^{-s0}}{s^2 + 4} [2s \sin (2 \cdot 0) - s \cos (2 \cdot 0)] = \frac{e^{-sT}}{s^2 + 4} [2s \sin 2T - s \cos 2T] + \frac{s}{s^2 + 4}$$

Enfim, substituindo em (*), fica

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{s^2 + 4} [s + e^{-sT} (2s \sin 2T - s \cos 2T)] = \frac{s}{s^2 + 4} + \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{s^2 + 4} e^{-sT} (2s \sin 2T - s \cos 2T) \right]$$

Como estamos considerando o caso $s > 0$, temos que $\lim_{T \rightarrow +\infty} (-sT) = -\infty \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} = 0$.

Como a função $y(t) = 2s \sin 2t - s \cos 2t$ é limitada (mais precisamente $|y(t)| \leq 2 + s$, para todo $t \in \mathbb{R}$),

segue que $\lim_{T \rightarrow +\infty} [e^{-sT} (2s \sin 2T - s \cos 2T)] = 0$ e portanto $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt = \frac{s}{s^2 + 4}$.

Lembremos que queremos obter os valores $s \in \mathbb{R}$ para os quais se tem $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos 2t \, dt = \frac{1}{5}$, ou seja,

$$\frac{s}{s^2 + 4} = \frac{1}{5} \Rightarrow s^2 - 5s + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{s = 1 \text{ ou } s = 4}.$$

Solução da Questão 2 b)

Analisemos a convergência da integral $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2 + xe^{sx}} dx$.

Primeiramente, note que valem as seguintes estimativas:

$$0 < xe^{sx} < 2 + xe^{sx} \quad (\text{para } x > 0) \quad \text{e que } x \geq 2 \Rightarrow 2e^{sx} \leq xe^{sx}.$$

$$\text{Logo: } x \geq 2 \Rightarrow 2e^{sx} \leq xe^{sx} < 2 + xe^{sx} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2 + xe^{sx}} < \frac{1}{2e^{sx}} = \frac{e^{-sx}}{2} \quad (*)$$

(**Caso 1:** $s > 0$) neste caso tem-se $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} = 0$ e portanto

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{2} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_2^T \frac{e^{-sx}}{2} dx = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{-e^{-sx}}{2s} \right]_2^T = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2s} [e^{-2s} - e^{-sT}] = \frac{e^{-2s}}{2s}$$

ou seja, a integral $\int_2^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{2} dx$ é convergente e portanto, aplicando o critério de comparação em (*) segue

que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2 + xe^{sx}} dx$ é também convergente no caso em que $s > 0$.

(Caso 2: $s \leq 0$)

Neste caso, lembrando que estamos interessados no intervalo de integração de $x \geq 2$, temos que

$$e^{sx} \leq e^0 = 1 \Rightarrow xe^{sx} \leq x \Rightarrow 2 + xe^{sx} \leq 2 + x \leq x + x = 2x \quad \text{ou seja, } 2 + xe^{sx} \leq 2x \Rightarrow \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2 + xe^{sx}}$$

$x > 0$ $x \geq 2$

Segue portanto do critério de comparação que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2 + xe^{sx}} dx$ é divergente neste caso, uma vez que

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x} dx \text{ é divergente.}$$

Portanto, a integral é convergente caso $s > 0$ e divergente, caso $s \leq 0$.

Solução da Questão 3 a)

A região considerada é mostrada na figura 3.1 a seguir:

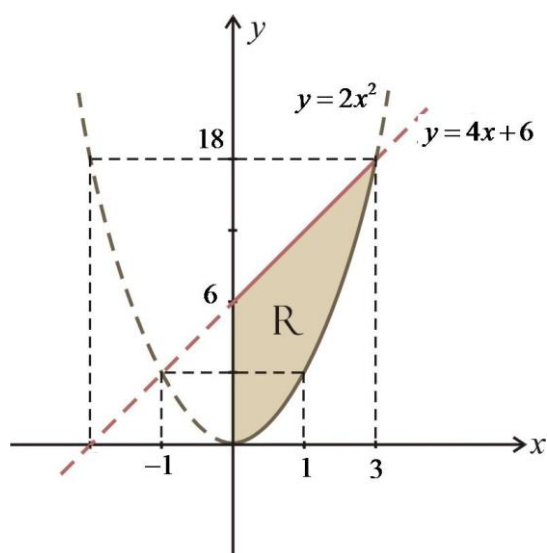


Figura 3.1

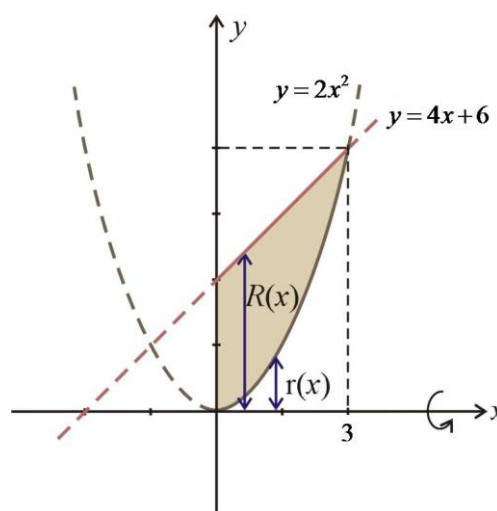


Figura 3.2

Note que o eixo de rotação é o eixo x e como a integração tem que ser feita em relação a x , o método dos discos ou arruelas é o indicado. Na figura 3.2 é mostrada a arruela típica correspondente ao problema. O sólido é mostrado na figura 3.3

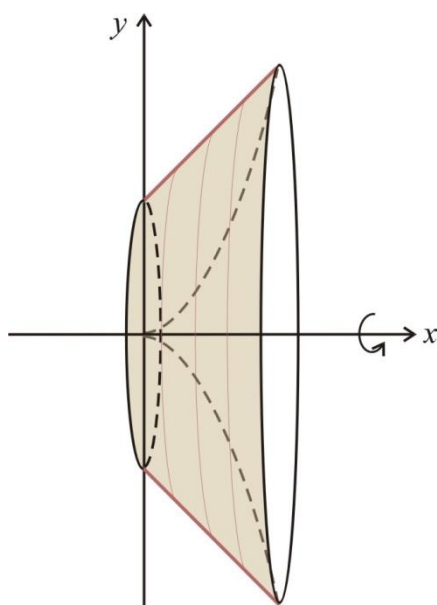


Figura 3.3

Observemos que $R(x) = 4x + 6$ e $r(x) = 2x^2$, em que $0 \leq x \leq 3$.

Assim, denotando o volume por V , temos que:

$$V = \pi \int_0^3 [(R(x))^2 - (r(x))^2] dx = \pi \int_0^3 [(4x + 6)^2 - (2x^2)^2] dx = \pi \int_0^3 (-4x^4 + 16x^2 + 48x + 36) dx$$

Solução da Questão 3 b)

O sólido é o mesmo exibido na figura 3.3 anterior.

Para calcular o volume deste sólido **por integração em relação a y** , observe que o método das cascas cilíndricas é o indicado.

Vamos dividir a região dada em duas regiões R_1 e R_2 , como mostra as figuras em 3.4 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo x .

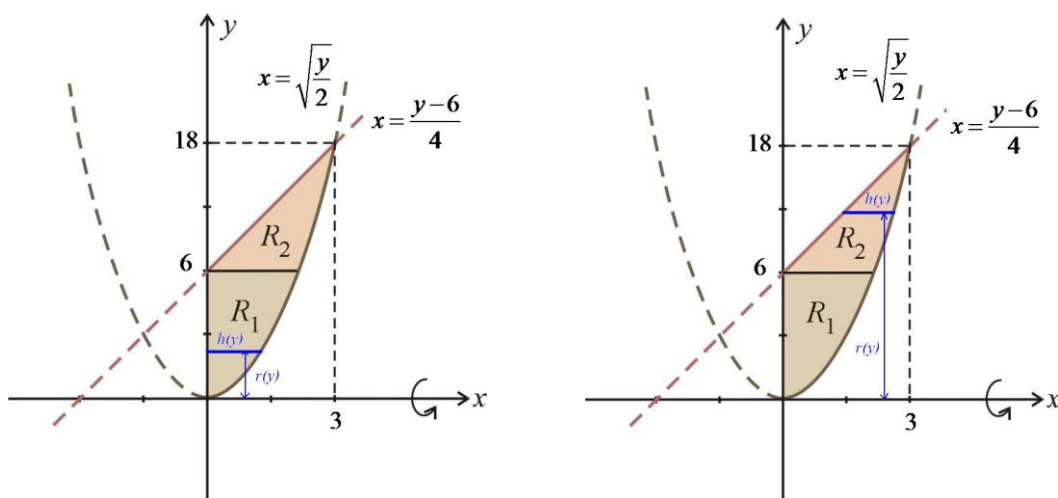


Figura 3.4

Neste caso na região R_1 para $0 \leq y \leq 6$ resulta $r(y) = y$ e $h(y) = \sqrt{\frac{y}{2}} - 0 = \sqrt{\frac{y}{2}}$, logo denotando por V_1 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_1 = 2\pi \int_0^6 r(y).h(y)dy = 2\pi \int_0^6 y \sqrt{\frac{y}{2}} dy$$

Analogamente na região R_2 para $6 \leq y \leq 18$ resulta $r(y) = y$ e $h(y) = \sqrt{\frac{y}{2}} - \frac{y-6}{4}$, logo denotando por V_2 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_2 = 2\pi \int_6^{18} r(y).h(y)dy = 2\pi \int_6^{18} y \left[\sqrt{\frac{y}{2}} - \frac{y-6}{4} \right] dy$$

Assim neste caso

$$V = 2\pi \int_0^6 y \sqrt{\frac{y}{2}} dy + 2\pi \int_6^{18} y \left[\sqrt{\frac{y}{2}} - \frac{y-6}{4} \right] dy$$

Solução da Questão 3 c)

Note que o eixo de rotação é o eixo y e como a integração tem que ser feita em relação a x , o método das cascas cilíndricas é o conveniente.

A figura 3.5 mostra a casca típica associada ao problema, em que $h(x) = (4x+6) - 2x^2$ e $r(x) = x$, com $0 \leq x \leq 3$.

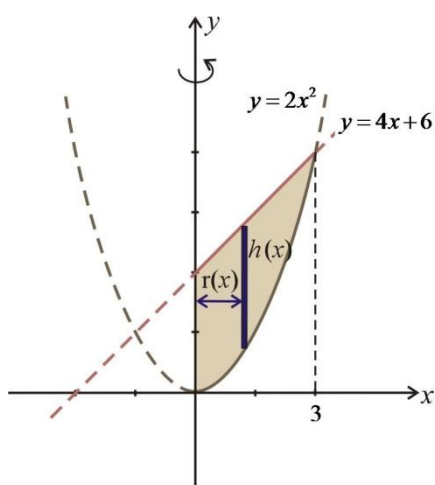


Figura 3.5

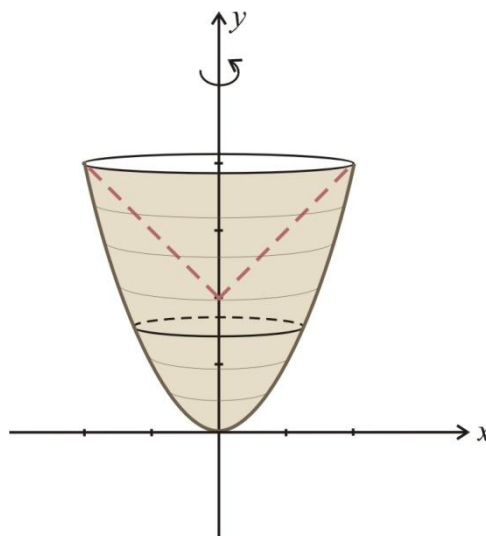


Figura 3.6

Assim, o volume V do sólido é dado por

$$V = 2\pi \int_0^3 r(x).h(x)dx = 2\pi \int_0^3 x(4x+6-2x^2)dx = 2\pi \int_0^3 (6x+4x^2-2x^3)dx.$$

O sólido é mostrado na figura 3.6.

Solução da Questão 3 d)

Note que o eixo de rotação é o eixo y e como a integração tem que ser feita em relação a y , o método dos discos ou arruelas é o indicado.

Como no item b), vamos dividir a região dada em duas regiões R_1 e R_2 , como mostram as figuras em 3.7 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo y .

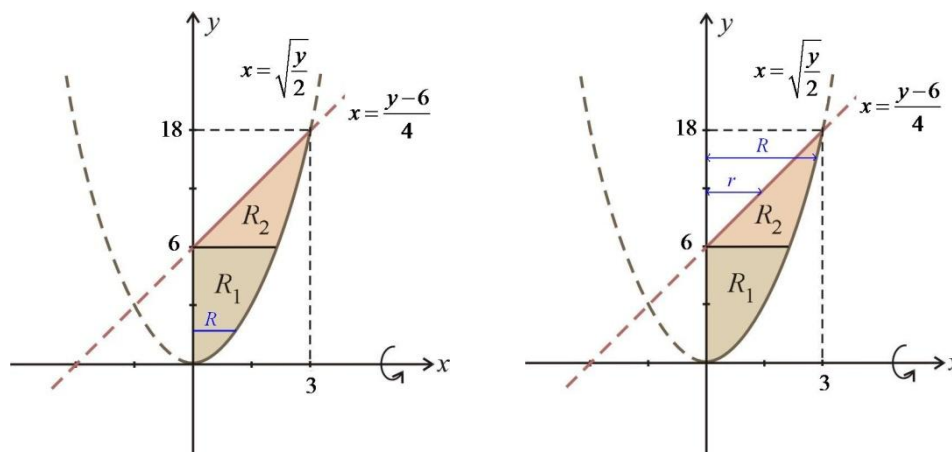


Figura 3.7

Neste caso na região R_1 para $0 \leq y \leq 6$ resulta $R(y) = \sqrt{\frac{y}{2}}$, logo denotando por V_1 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_1 = \pi \int_0^6 R(y)^2 dy = \pi \int_0^6 \left[\sqrt{\frac{y}{2}} \right]^2 dy = \pi \int_0^6 \frac{y}{2} dy$$

Analogamente na região R_2 para $6 \leq y \leq 18$ resulta $R(y) = \sqrt{\frac{y}{2}}$ e $r(y) = \frac{y-6}{4}$, logo denotando por V_2 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_2 = \pi \int_6^{18} \left[R(y)^2 - r(y)^2 \right] dy = \pi \int_6^{18} \left[\left[\sqrt{\frac{y}{2}} \right]^2 - \left(\frac{y-6}{4} \right)^2 \right] dy = \pi \int_6^{18} \left[\frac{y}{2} - \left(\frac{y-6}{4} \right)^2 \right] dy$$

Assim neste caso

$$V = \pi \int_0^6 \frac{y}{2} dy + \pi \int_6^{18} \left[\frac{y}{2} - \left(\frac{y-6}{4} \right)^2 \right] dy.$$

Solução da Questão 3 e)

Note que o eixo de rotação é a reta vertical $x = 3$. Neste caso, o método das cascas cilíndricas se aplica bem. A casca típica é mostrada na figura 3.8 abaixo.

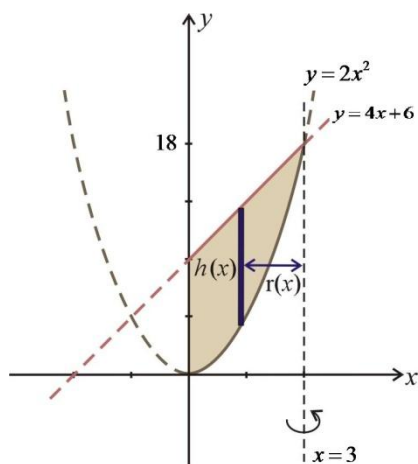


Figura 3.8

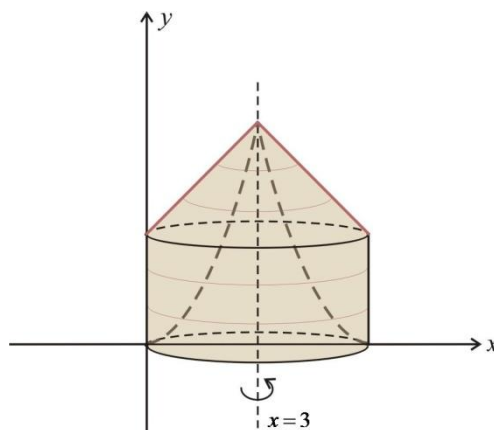


Figura 3.9

Tem-se $h(x) = (4x + 6) - 2x^2$ e $r(x) = 3 - x$, com $0 \leq x \leq 3$. O volume V do sólido é portanto dado por

$$V = 2\pi \int_0^3 r(x)h(x)dx = 2\pi \int_0^3 (3-x).(6+4x-2x^2)dx = 2\pi \int_0^3 (18+6x-10x^2+2x^3)dx.$$

O sólido é exibido na figura 3.9.

Solução da Questão 3 f)

Note que o eixo de rotação é a reta horizontal $y = 18$. Neste caso o método dos discos ou arruelas é o indicado. A arruela típica é mostrada na figura 3.10 e o sólido na figura 3.11.

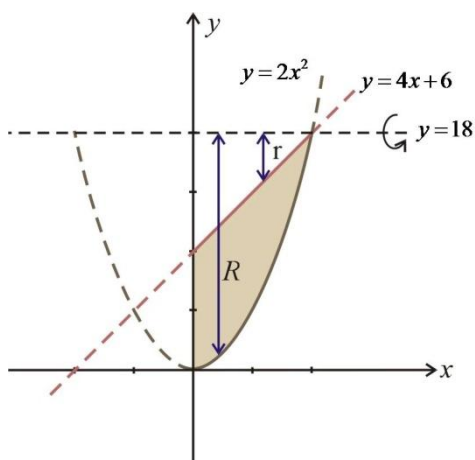


Figura 3.10

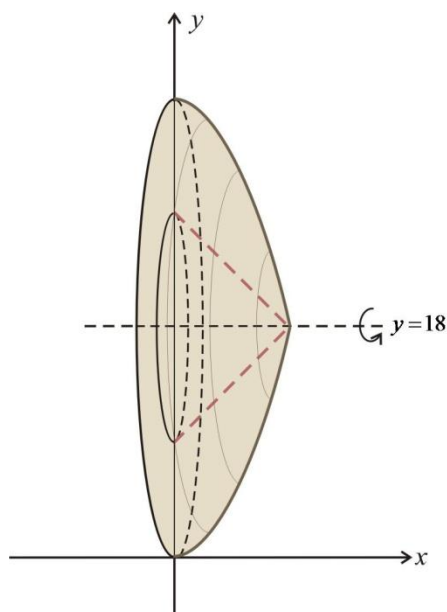


Figura 3.11

Aqui $R(x) = 18 - 2x^2$ e $r(x) = 18 - (4x + 6) = 12 - 4x$, com $0 \leq x \leq 3$. Assim

$$(R(x))^2 = (18 - 2x^2)^2 = \text{ e } (r(x))^2 = (12 - 4x)^2.$$

Portanto, o volume do sólido é dado por

$$V = \pi \int_0^3 [R(x)^2 - r(x)^2] dx = \pi \int_0^3 [(18 - 2x^2)^2 - (12 - 4x)^2] dx = \pi \int_0^3 [180 + 96x - 88x^2 + 4x^4] dx.$$

Solução da Questão 4

Notemos inicialmente que se um par (x, y) satisfaz a equação que define a curva, então os pares $(-x, y)$, $(x, -y)$ e $(-x, -y)$ também satisfazem, uma vez que, para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se

$$(-t)^{2/3} = \sqrt[3]{(-t)^2} = \sqrt[3]{t^2} = t^{2/3}$$

Assim a curva é simétrica com relação aos eixos x e y , e também relativamente à origem. A curva é esboçada na figura 4.1 a seguir:

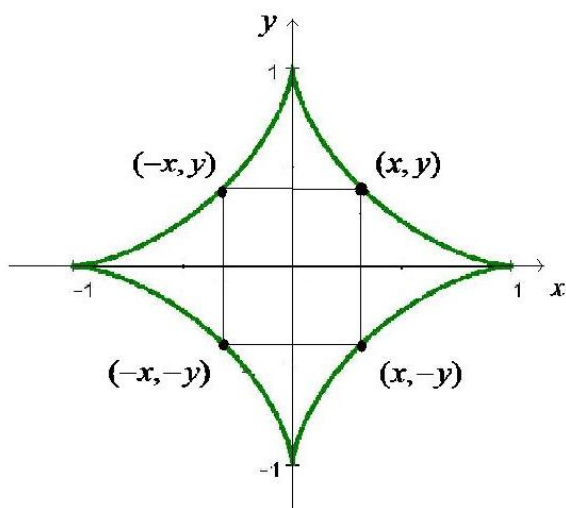


Figura 4.1

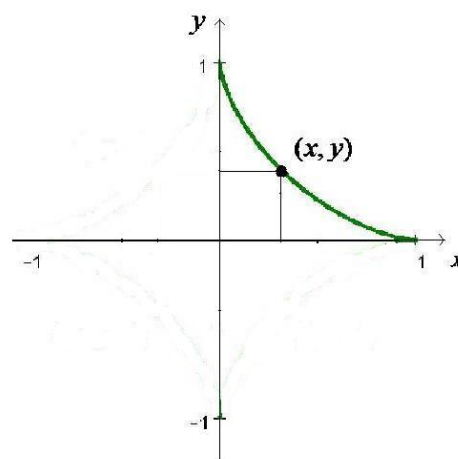


Figura 4.2

Devido as simetrias vistas acima, o comprimento total da curva é quatro vezes o comprimento de um trecho contido em um dos quadrantes. Basta-nos portanto calcular o comprimento de um destes trechos, por exemplo aquele contido no primeiro quadrante ($x \geq 0$ e $y \geq 0$), como mostrado na figura 4.2 acima. De acordo com a aula 29 do caderno didático, se uma curva é dada por $y = y(x)$, com $a \leq x \leq b$, então seu comprimento é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Calculemos $y'(x)$ por derivação implícita na equação da curva :

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3} \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} \Rightarrow (y')^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3} \Rightarrow$$
$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{2/3} = \frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{2/3}} \Rightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = x^{-1/3}$$

Desta forma, o **comprimento do trecho da curva compreendido no primeiro quadrante** é dado por

$$L = \int_0^1 x^{-1/3} dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \text{ unidades de comprimento.}$$

Logo, o comprimento total da curva é $4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ unidades de comprimento.