

AP2- CÁLCULO II-2013/1 Gabarito

Solução da 1ª Questão (2,5 pontos).

(a) (1,5 ponto)

$$\int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)} \right) dx, \text{ onde } A, B, C \text{ e } D \text{ são determinados como}$$

segue

$$\begin{aligned} 5x^3 - 3x^2 + 2x - 1 &= Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2 \\ &= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \begin{cases} A + C = 5 & (1) \\ B + D = -3 & (2), \\ A = 2 & (3) \\ B = -1 & (4) \end{cases}$$

Subtraindo (3) de (1) resulta

$$C = 3 \quad (5)$$

Subtraindo (4) e (2) obtemos

$$D = -2 \quad (6)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{x^2(x^2 + 1)} dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{3x - 2}{(x^2 + 1)} \right) dx \\ &= 2 \ln |x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 1)} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2 + 1)} \\ &= 2 \ln |x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1) - 2 \arctg(x) + C \end{aligned}$$

(b) (1,0 ponto)

Como $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ então $y' = (x^2 + 1)^{1/2} 2x$. Sabemos também que $s = \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2} dx$,

onde

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + ((x^2 + 1)^{1/2} 2x)^2} = \sqrt{1 + (x^2 + 1) 4x^2}$$

$$= \sqrt{1+4x^4+4x^2} = \sqrt{1+4x^2+4x^4} = \sqrt{(1+2x^2)^2} = 1+2x^2$$

Assim,

$$s = \int_0^2 (1+2x^2) dx = x + 2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 2 + \frac{2^4}{3} = 2 + \frac{16}{3} = \frac{22}{3}.$$

Solução da 2ª Questão (2,0 pontos)

(a) (1,0 ponto)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{(x+1)^3} dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-2} \frac{1}{(x+1)^3} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{-2} (x+1)^{-3} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{(x+1)^{-2}}{-2} \right]_a^{-2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{(-2+1)^{-2}}{-2} - \frac{(a+1)^{-2}}{-2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2(a+1)^2} \right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(b) (1,0 ponto)

Como $e^x < 1 + e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $\frac{1}{e^x} > \frac{1}{1+e^x} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e em particular para $x \in [0, +\infty)$. Observe que as funções $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ e $g(x) = \frac{1}{e^x}$ são contínuas sobre o intervalo não limitado $[0, +\infty)$. Por outro lado, pelo visto nas aulas, sabemos que $\int_b^{+\infty} e^{-rx} dx$

converge se $r > 0$, assim podemos afirmar que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge. Logo pelo critério de comparação podemos afirmar que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$ converge.

Solução da 3ª Questão (3,0 pontos)

(a) (1,5 ponto)

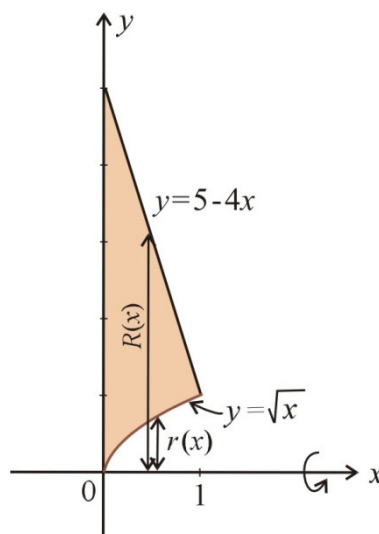
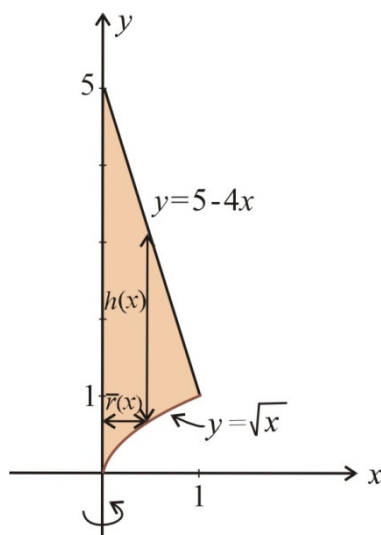


Figura 2

Pelo método dos discos ou arruelas, vemos na Figura 3 que $R(x) = 5 - 4x$ e $r(x) = \sqrt{x}$. Assim o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de R em torno do eixo Ox é dado por

$$\begin{aligned}
 V(R) &= \pi \int_0^1 \left((R(x))^2 - (r(x))^2 \right) dx = \pi \int_0^1 \left((5-4x)^2 - (\sqrt{x})^2 \right) dx = \pi \int_0^1 (25 - 40x + 16x^2 - x) dx \\
 &= \pi \left(25x - 41 \frac{x^2}{2} + 16 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(25 - \frac{41}{2} + \frac{16}{3} \right) = \pi \left(\frac{150 - 123 + 32}{6} \right) = \frac{59}{6} \pi \\
 &\text{unidades de volume.}
 \end{aligned}$$

(b) (1,5 ponto)**Figura 3**

Pelo método das cascas cilíndricas, vemos na Figura 3 que $\bar{r}(x) = x$ e $h(x) = 5 - 4x - \sqrt{x}$. Assim o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de R em torno do eixo Oy é dado por

$$\begin{aligned}
 V(R) &= 2\pi \int_0^1 \bar{r}(x) h(x) dx = 2\pi \int_0^1 x (5 - 4x - \sqrt{x}) dx = 2\pi \int_0^1 (5x - 4x^2 - x^{3/2}) dx \\
 &= 2\pi \left(5 \frac{x^2}{2} - 4 \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^{5/2}}{5} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{3} - \frac{2}{5} \right) = 2\pi \left(\frac{75 - 40 - 12}{30} \right) = \frac{23}{15} \pi \\
 &\text{unidades de volume.}
 \end{aligned}$$

Solução da 4ª Questão (2,5 pontos)**(a) (1,0 ponto)**

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 + 1}{x^2(3y^2 + 1)} \Rightarrow (3y^2 + 1) dy = \frac{x^2 + 1}{x^2} dx \Rightarrow \int (3y^2 + 1) dy = \int \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right) dx \\
 &\Rightarrow \int (3y^2 + 1) dy = \int \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx \\
 &\Rightarrow 3 \frac{y^3}{3} + y = x + \frac{x^{-1}}{-1} + C \Rightarrow y^3 + y = x - \frac{1}{x} + C.
 \end{aligned}$$

(b) (1,5 ponto)

Observe que a equação, $y' + (\cotg x) y = \cos x$ tal que $y = 1$ quando $x = \frac{\pi}{6}$, está na forma padrão da equação linear de primeira ordem onde $p(x) = \cotg x$ e $q(x) = \cos x$ sendo p e q funções contínuas em $I = (0, \pi)$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula. Note que

$$\int p(x) dx = \int \cotg x dx = \ln |\sen x| = \ln \sen x \quad x \in I, \text{ pois } \sen x > 0 \text{ em } I = (0, \pi).$$

Assim, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\ln \sen x} = \sen x$, $x \in I$. Logo, multiplicando a equação diferencial pelo fator $\mu(x)$, resulta:

$$\underbrace{(\sen x) y' + (\cos x) y}_{\frac{d}{dx}(y \sen x)} = \sen x \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y \sen x) = \sen x \cos x \quad \Rightarrow \quad y \sen x = \int \underbrace{\sen x}_u \underbrace{\cos x dx}_{du} \quad \Rightarrow \quad y \sen x = \frac{1}{2} \sen^2 x + C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \sen x + \frac{C}{\sen x}, \text{ onde } x \in I, \text{ é a solução geral da equação diferencial linear dada.}$$

$$\text{Para achar a solução particular temos que } \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \underbrace{\sen \frac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}} + \frac{C}{\underbrace{\sen \frac{\pi}{6}}_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + 2C$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + 2C \Rightarrow \frac{3}{4} = 2C \Rightarrow C = \frac{3}{8}. \text{ Logo a solução do problema de valor inicial é}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \sen x + \frac{3}{8 \sen x} \quad \text{ou} \quad y = \frac{1}{2} \sen x + \frac{3}{8} \operatorname{cosec} x.$$