

AP2- CÁLCULO II-2012/1 GABARITO

1ª Questão (3,0 pontos).

(a) (1,5 ponto) Utilizando o método de substituição trigonométrica, calcule $\int \frac{du}{(u^2 + 4)^{\frac{3}{2}}}$.

(b) (1,5 ponto) Utilizando o método de frações parciais, calcule $\int \frac{dx}{x^3 + x}$

Solução da 1ª Questão

(a) Para utilizar a substituição trigonométrica, considere o triângulo associado

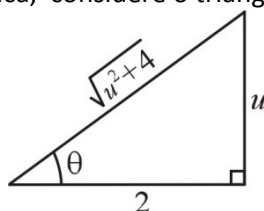


Figura 1

Fazendo $u = 2 \tan \theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Então $du = 2 \sec^2 \theta d\theta$ e $\sec \theta = \frac{\sqrt{u^2 + 4}}{2} \Rightarrow 4 \sec^2 \theta = (u^2 + 4)$.

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(u^2 + 4)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{(2^2 \sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2^2} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^3 \theta} = \frac{1}{2^2} \int \frac{d\theta}{\sec \theta} = \frac{1}{4} \int \cos \theta d\theta = \frac{1}{4} \sin \theta + C \\ &= \frac{1}{4} \frac{u}{\sqrt{u^2 + 4}} + C. \end{aligned}$$

(b)

Note que

$$\int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$$

Por outro lado, a função $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$ é uma função racional própria. O denominador tem um fator

linear e um fator quadrático irredutível, logo a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} \quad (*)$$

Para determinar os valores de A , B e C multiplicamos ambos os lados da expressão (*) pelo produto dos denominadores $x(x^2 + 1)$, obtendo

$$1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x \quad (**)$$

$$1 = (A + B)x^2 + Cx + A$$

$$(1) \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (1) resulta

$$B = -1, C = 0 \text{ e } A = 1$$

(2)

Substituindo em (*) os valores achados em (2) temos

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$$

2ª Questão (2,5 pontos)

(a) (1,5 ponto) Calcule a integral imprópria $\int_0^{+\infty} 2^{-x} dx$.

(b) (1,0 ponto) Analise a convergência ou divergência da integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ utilizando algum dos critérios apresentados na aula.

Solução da 2ª Questão

(a) Observe que $f(x) = 2^{-x}$ é contínua no intervalo $[0, +\infty)$ assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não limitado $[0, +\infty)$.

$$\int_0^{+\infty} 2^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b 2^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^{-x}}{-\ln 2} \right) \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^{-b}}{-\ln 2} - \frac{2^{-0}}{-\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2} \text{ visto que } \lim_{b \rightarrow +\infty} 2^{-b} = 0.$$

(b) Observe que a função $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ é contínua sobre o intervalo não limitado $[1, +\infty)$.

$$\text{Seja } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} > 0 \text{ e } g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} > 0 \text{ para } x \in [1, +\infty).$$

Observe que, para $x \in [1, +\infty)$, tem-se $x^3+1 > x^3$, logo $\sqrt{x^3+1} > \sqrt{x^3}$ e assim $0 < \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Por outro lado, sabemos do primeiro exemplo referencial do caderno de coordenação [ou calculando diretamente], que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$ converge, pois temos neste caso $r = 3/2 > 1$. Assim, pelo critério de

comparação, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ também converge.

3ª Questão (2,5 pontos) Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = x^3$, $y = 0$ e $x = 2$.

(a) (1,0 ponto) Esboce o gráfico da região $\mathcal{R}$.

(b) (1,5 ponto) Usando o método das cascas cilíndricas **indique, porém não calcule** o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno da reta $x = 4$.

Solução da 3ª Questão

(a) O esboço do gráfico da região $\mathcal{R}$ é mostrado na Figura 2

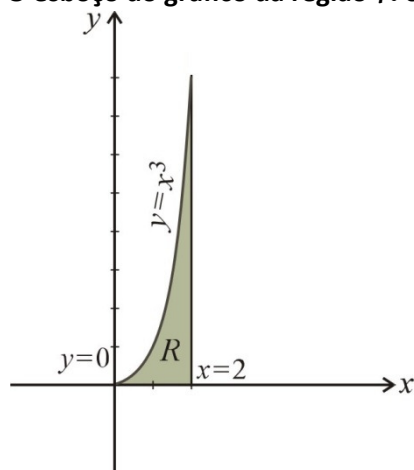


Figura 2

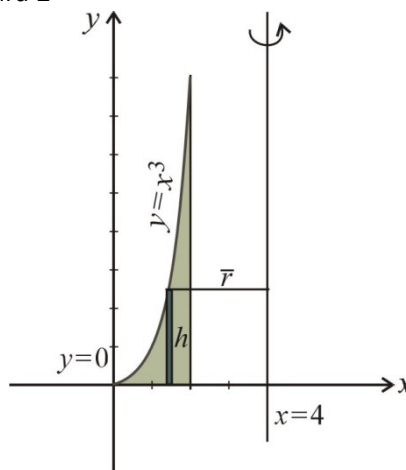


Figura 3

(b) Pelo método das cascas cilíndricas, vemos na Figura 3 que $\bar{r}(x) = 4 - x$ e $h(x) = x^3$. Assim o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno da reta $x = 4$ é dado por

$$V(R) = 2\pi \int_0^2 \bar{r}(x) h(x) dx = 2\pi \int_0^2 (4-x) x^3 dx = 2\pi \int_0^2 (4x^3 - x^4) dx$$

4ª Questão (2,0 pontos) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais

(a) (1,0 ponto) $y' + \frac{y}{(x+1)} = \frac{\ln x}{(x+1)}$

(b) (1,0 ponto) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, \quad x > 0$

Solução da 4ª Questão

(a) Observe que a equação $y' + \frac{y}{(x+1)} = \frac{\ln x}{(x+1)}$ está na forma padrão da equação linear de primeira

ordem com $p(x) = \frac{1}{x+1}$ e $q(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ onde p e q são funções contínuas em $I = (0, +\infty)$.

Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula. Note que

$$\int p(x) dx = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln |x+1| = \ln(x+1) \quad x \in I$$

Assim, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\ln(x+1)} = x+1, x \in I$. Logo, multiplicando a equação diferencial pelo fator $\mu(x)$, resulta:

$$\underbrace{(x+1)y' + y}_{\frac{d}{dx}((x+1)y)} = \ln x \Rightarrow \frac{d}{dx}((x+1)y) = \ln x \Rightarrow (x+1)y = \int \ln x \, dx$$

Como $\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$, onde C é uma constante arbitrária.

$\Rightarrow y = \frac{1}{x+1}(x \ln x - x + C)$, onde $x \in I$, é a solução geral da equação diferencial linear dada.

(b) Observe que a equação $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, $x > 0$, não é uma equação diferencial linear, porém

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$, onde $F(u) = e^u + u$, logo a equação diferencial dada é homogênea e,

fazendo $u = \frac{y}{x}$, tem-se $y = u x$, logo $y' = u + u' x$. Substituindo este último valor na equação dada

resulta $u + u' x = e^u + u \Rightarrow u' x = e^u \Rightarrow \frac{du}{e^u} = \frac{dx}{x}$. Logo $\int e^{-u} du = \int \frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow e^{-u} = -\ln x + \ln c \Rightarrow e^{-u} = \ln\left(\frac{c}{x}\right) \Rightarrow u = -\ln\left[\ln\left(\frac{c}{x}\right)\right] \Rightarrow \frac{y}{x} = -\ln\left[\ln\left(\frac{c}{x}\right)\right]$$

$$\Rightarrow y = -x \ln\left[\ln\left(\frac{c}{x}\right)\right].$$