Consórcio cederj
Fundação CECIERJ
Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

# AP2 – CÁLCULO III – 2013-1

| Nome: | Matrícula: |
|---|---|
| Polo: | Data: |

## Atenção!

- Identifique a Prova, colocando Nome, Matrícula, Polo e Data;
- É expressamente proibido o uso de calculadoras;
- Devolver a prova e a folha de respostas ao responsável;
- O desenvolvimento das questões pode ser a lápis. No entanto, as respostas deverão estar necessariamente à caneta;
- É expressamente proibido o uso de corretivo nas respostas.
- As respostas devem estar acompanhadas de justificativa. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

---

**Questão 1 Todos os itens dessa questão referem-se à função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que**

$$f(x,y) = y^2(x-2) - x(x^2-3).$$

(a) **(2.0 pt)** Determine os pontos de máximo e mínimo relativo, e os pontos de sela, de $f$.

(b) **(2.0 pt)** Determine o valor máximo global e o valor mínimo global de $f$ na região triangular $T$ de vértices $(0,0)$, $(2,2)$ e $(-2,2)$, sendo que a região $T$ inclui os lados do triângulo. Esboce a região $T$.

(c) **(1.0 pt)** Suponha que as variáveis $u$ e $t$ dependem das variáveis $x$ e $y$ de modo que $(u,t) = (-1,0)$ para $(x,y) = (1,1)$,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(1,1) = 2, \quad \frac{\partial t}{\partial x}(1,1) = 3 \ \text{ e } \ \frac{\partial t}{\partial y}(1,1) = 4.$$

Se $f(x,y) = g(u(x,y), t(x,y))$, com $u(x,y)$, $t(x,y)$ e $g(u,t)$ sendo funções diferenciáveis, calcule

$$\frac{\partial g}{\partial t}(-1,0).$$

**Solução:**

(a) Calculando $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, e em seguida, igualando-os a zero para achar os pontos críticos, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 - 3x^2 + y^2 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y(x-2) = 0 \Longrightarrow 2y = 0, \quad x - 2 = 0 \Longrightarrow y = 0, \quad x = 2\,. \end{cases}$$

Logo, substituindo $y = 0$ em $3 - 3x^2 + y^2 = 0$, obtemos que $x = \pm 1$, onde obtemos os pontos críticos $(-1,0)$, $(1,0)$.

E, substituindo $x = 2$ em $3 - 3x^2 + y^2 = 0$, obtemos que $y = \pm 3$, donde obtemos os pontos críticos $(2, -3)$, $(2, 3)$.

Logo, os pontos críticos de $f$ são $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(2, -3)$ e $(2, 3)$.

Também, calculando a Hessiana temos:

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Big)^2 \\ &= -6x \cdot 2(x-2) - 4y^2 \\ &= -4\big(3x^2 - 6x + y^2\big) \end{aligned}$$

e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6x$.

Assim, para o ponto crítico:

- $(-1, 0)$, temos $H(-1, 0) = -36 < 0$. Logo, o ponto $(-1, 0)$ é um ponto de sela.
- $(1, 0)$, temos $H(1, 0) = 12 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = -6$. Logo, o ponto $(1, 0)$ é um ponto de máximo relativo.
- $(2, -3)$, temos $H(2, -3) = -36 < 0$. Logo, o ponto $(2, -3)$ é um ponto de sela.
- $(2, 3)$, temos $H(2, 3) = -36 < 0$. Logo, o ponto $(2, 3)$ é um ponto de sela.

(b) A região triangular T está desenhada na Figura 1, em que

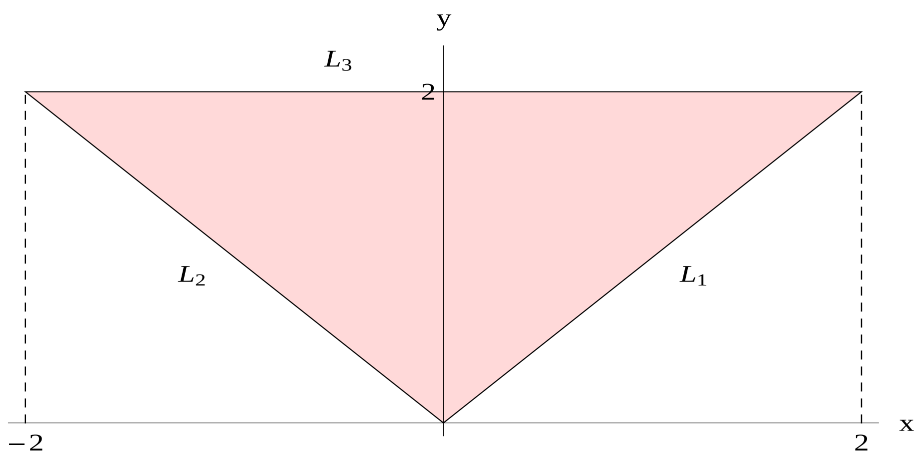


Figura 1: Exercício 1-(b)

- $L_1$ é formada pelos pontos sobre a reta $y = x$, com $0 \leq x \leq 2$.
- $L_2$ é formada pelos pontos sobre a reta $y = -x$, com $-2 \leq x \leq 0$.
- $L_3$ é formada pelos pontos sobre a reta $y = 2$, com e $-2 \leq x \leq 2$.

Como $f$ é uma função contínua em T, que é um conjunto fechado e limitado, segue, pelo Teorema de Weierstrass, que $f$ admite pontos de máximo e mínimo global em T. Esses pontos podem estar no interior de T ou na fronteira de T. Vamos determinar os candidatos a extremos no interior e, em seguida, na fronteira de T.

Os candidatos no interior de T são aqueles pontos que satisfazem $\nabla f(x,y) = (0,0)$, ou seja, $(3-3x^2+y^2, 2y(x-2)) = (0,0)$, isto é,

$$\begin{cases} 3-3x^2+y^2=0 \\ 2y(x-2)=0 \end{cases} \implies (-1,0),\ \ (1,0),\ \ (2,-3),\ \ (2,3)\ \ \big(\text{pelo item (a)}\big)$$

Como nenhum dos pontos encontrados estão em $T$, segue que não existem pontos candidatos a extremo global de $f$ no interior de T.

Vamos, agora, determinar os candidatos a extremos de $f$ na fronteira de T, que é formada pela reunião dos segmentos de reta representados por $L_1,\ L_2$ e $L_3$. Faremos isso, determinando os candidatos a extremo em cada um destes segmentos.

Para os pontos que estão em $L_1$, aplicamos o método de Lagrange, determinando as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g_1(x,y) \\ g_1(x,y) = y-x = 0 \end{cases}$$

com $0 \leq x \leq 2$, ou equivalentemente

$$\begin{cases} 3-3x^2+y^2 = -\lambda \\ 2y(x-2) = \lambda \\ y-x=0 \end{cases}$$

com $0 \leq x \leq 2$. Das duas primeiras equações, obtemos que $3x^2-y^2-2xy+4y=3$. E, substituindo $y=x$ nessa equação, segue que $x=\dfrac{3}{4}$. Consequentemente, $y=\dfrac{3}{4}$ e $\lambda = -\dfrac{15}{8}$. Note que o ponto $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ está no interior do segmento $L_1$ e que os pontos da fronteira de $L_1$ também são candidatos a extremo global de $f$.

Consequentemente, os correspondentes candidatos a extremo global de $f$ em $L_1$ são: $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{3}{4}\right)$, $(0,0)$ e $(2,2)$.

Analogamente, para os pontos que estão em $L_2$, temos de determinar as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g_2(x,y) \\ g_2(x,y) = y+x = 0 \end{cases}$$

com $-2 \leq x \leq 0$, ou equivalentemente

$$\begin{cases} 3-3x^2+y^2 = \lambda \\ 2y(x-2) = \lambda \\ y+x=0 \end{cases}$$

com $-2 \leq x \leq 0$. Das duas primeiras equações, obtemos que $3x^2-y^2+2xy-4y=3$. E, substituindo $y=-x$ nessa equação, segue que $x=\dfrac{3}{4}$. Consequentemente, $y=-\dfrac{3}{4}$ e $\lambda=\dfrac{15}{8}$.

Note que o ponto $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ está no interior do segmento $L_2$ e que os pontos da fronteira de $L_2$ também são candidatos a extremo global de $f$.

Consequentemente, os correspondentes candidatos a extremo global de $f$ em $L_2$ são: $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$, $(-2, 2)$ e $(0, 0)$.

De forma análoga, para os pontos que estão em $L_3$, temos de determinar as soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g_3(x,y) \\ g_2(x,y) = y - 2 = 0 \end{cases}$$

com $-2 \leq x \leq 2$, ou equivalentemente

$$\begin{cases} 3 - 3x^2 + y^2 = 0 \\ 2y(x-2) = \lambda \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

com $-2 \leq x \leq 2$. Substituindo $y = 2$ na primeira equação, obtemos que $x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$. Note que para $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ e $y = 2$, obtemos, da segunda equação, que $\lambda = -\frac{4}{3}(6 + \sqrt{21})$. E que para $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ e $y = 2$, obtemos que que $\lambda = 4\left(-2 + \sqrt{\frac{7}{3}}\right)$.

Os pontos $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, 2\right)$, $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, 2\right)$ estão no interior do segmento $L_3$, logo eles são candidatos a extremo global de $f$, bem como, os pontos da fronteira de $L_3$, isto é, $(-2, 2)$ e $(2, 2)$.

Consequentemente, os correspondentes candidatos a extremo global de $f$ em $L_3$ são: $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, 2\right)$, $\left(\sqrt{\frac{7}{3}}, 2\right)$, $(-2, 2)$ e $(2, 2)$.

Na Tabela 1, com as informações obtidas acima, criamos uma lista dos candidatos a extremo global de $f$, com os respectivos valores de $f$ nesses pontos, e suas localizações em relação a região triangular.

Concluimos pela Tabela 1 que existem dois pontos de máximo global de $f$, eles ocorrem em $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ e $\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ e que o ponto de mínimo global de $f$ ocorre em $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}}, 2\right)$.

**Observação**: Você também pode calcular os candidatos a extremo global na fronteira de $T$, usando os conhecimentos de Cálculo Diferencial para funções de uma variável real.

| $(x,y)$ | $f(x,y)$ | Localização | Conclusão |
|---|---|---|---|
| $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$ | $\frac{9}{8}$ | interior de $L_1$ | máximo global de $f$ |
| $(0,0)$ | $0$ | vértice de T | |
| $(2,2)$ | $-2$ | vértice de T | |
| $\left(\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\right)$ | $\frac{9}{8}$ | interior de $L_2$ | máximo global de $f$ |
| $(-2,2)$ | $-14$ | vértice de T | |
| $\left(-\sqrt{\frac{7}{3}},2\right)$ | $-\frac{2}{9}(36+7\sqrt{21})$ | interior de $L_3$ | mínimo global de $f$ |
| $\left(\sqrt{\frac{7}{3}},2\right)$ | $-8+\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$ | interior de $L_3$ | |

Tabela 1: Exercício1-(b)

(c) De $f(x,y)=y^2(x-2)-x(x^2-3)$ e de $f(x,y)=g(u(x,y),t(x,y))$, derivando $f$ em relação a $x$ e a $y$, e usando a Regra da Cadeia, obtemos que

$$\begin{aligned}3-3x^2+y^2=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),t(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial t}(u(x,y),t(x,y))\cdot\frac{\partial t}{\partial x}(x,y)\\ 2y(x-2)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(x,y),t(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial t}(u(x,y),t(x,y))\cdot\frac{\partial t}{\partial y}(x,y).\end{aligned}$$

Substituindo $(x,y)=(1,1)$, segue que

$$\begin{aligned}1 &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(1,1),t(1,1))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)+\frac{\partial g}{\partial t}(u(1,1),t(1,1))\cdot\frac{\partial t}{\partial x}(1,1)\\ -2 &= \frac{\partial g}{\partial u}(u(1,1),t(1,1))\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(1,1)+\frac{\partial g}{\partial t}(u(1,1),t(1,1))\cdot\frac{\partial t}{\partial y}(1,1).\end{aligned}$$

Como $(u,t)=(-1,0)$ para $(x,y)=(1,1)$ e as derivadas parciais de $u$ e $t$ em relação a $x,\ y$ são dadas, temos que

$$\begin{aligned}1 &= \frac{\partial g}{\partial u}(-1,0)\cdot 1+\frac{\partial g}{\partial t}(-1,0)\cdot 3\\ -2 &= \frac{\partial g}{\partial u}(-1,0)\cdot 2+\frac{\partial g}{\partial t}(-1,0)\cdot 4.\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos que $\frac{\partial g}{\partial u}(-1,0)=-5$ e que $\frac{\partial g}{\partial t}(-1,0)=2$.

Portanto, $\boxed{\frac{\partial g}{\partial t}(-1,0)=2}$ .

---

**Questão 2** Se $z=f(x,y)$ onde $x=rcos(\theta)$, $y=rsen(\theta)$ e $f$ é de classe $C^2$,

(a) **(1.5 pt)** calcule $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$;

(b) **(1.0 pt)** calcule $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$

**Solução:**

(a) Temos que $z = f\big(\underbrace{rcos(\theta)}_{x}, \underbrace{rsen(\theta)}_{y}\big)$

Assim:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot cos(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot sen(\theta)\\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\big(-rsen(\theta)\big)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\big(rcos(\theta)\big).
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\ cos(\theta)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}\right)\ sen(\theta)\\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot cos(\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cdot sen(\theta)\right)\ cos(\theta)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot cos(\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot sen(\theta)\right)\ sen(\theta)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}cos^2(\theta)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}sen(\theta)cos(\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}sen^2(\theta)
\end{aligned}$$

No cálculo de $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, usamos que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, já que $f$ é de classe $C^2$.

Também

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} &= -r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\ sen(\theta)-rcos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\\
&\quad +r\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\ cos(\theta)-rsen(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= -rsen(\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(-rsen(\theta)\big)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\big(rcos(\theta)\big)\right)-rcos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\\
&\quad +rcos(\theta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(-rsen(\theta)\big)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(rcos(\theta)\big)\right)-rsen(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\\
&= r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}sen^2(\theta)-r^2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(2sen(\theta)cos(\theta)\big)+r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}cos^2(\theta)-r\left(\frac{\partial f}{\partial x}cos(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}sen(\theta)\right)
\end{aligned}$$

(b) Do item (a), temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}cos^2(\theta)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}sen(\theta)cos(\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}sen^2(\theta)\\
&\quad +\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}sen^2(\theta)-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}sen(\theta)cos(\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}cos^2(\theta)-\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}cos(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}sen(\theta)\right)\\
&\quad +\frac{1}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}cos(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}sen(\theta)\right)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(cos^2(\theta)+sen^2(\theta)\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(cos^2(\theta)+sen^2(\theta)\right)\\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}
\end{aligned}$$

**Questão 3** Suponha que você esteja escalando um morro cujo formato é dado pela equação $z = 1000 - 0.01\,x^2 - 0.02\,y^2$, onde $x,\ y,\ z$ são medidos em metros, e você esteja em pé no ponto de coordenadas $(50\ ,80\ ,847)$, o eixo positivo dos $x$ aponta para o Leste e o eixo positivo dos $y$ aponta para o Norte.

(a) **(1.0 pt)**Se você andar em direção ao Sul, você começará a subir ou descer o morro? Com que taxa?

(b) **(0.75 pt)** Se você caminhar em direção ao Noroeste, você começará a subir ou descer o morro? Com que taxa?

(c) **(0.75 pt)** Em que direção e sentido a inclinação do morro é maior? Qual a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação a horizontal (eixo $x$ positivo)?

**Solução:**

(a) Temos do enunciado do problema que o vetor unitário $\vec{u}$ na direção Sul é $\vec{u} = (0, -1)$, veja Figura 2. Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(50, 80) = \nabla z(50, 80) \cdot (0, -1).$$

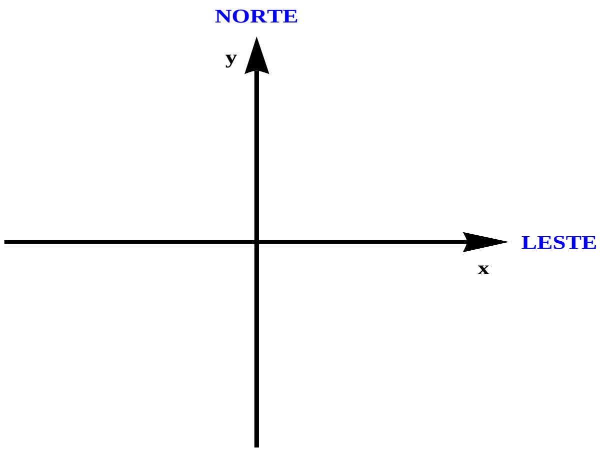


Figura 2: Exercício 3-(b)

Como $\nabla z(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right) = \big( -0.02x\ , -0.04y\big)$, segue que $\nabla z(50, 80) = (-1, -3.2)$. Logo,

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(50, 80) = (-1, -3.2) \cdot (0, -1) = 3.2.$$

Assim, eu começarei a subir pois $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(50, 80) > 0$ e a taxa é $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(50, 80) = 3.2$.

(b) O vetor unitário $\vec{u}$ na direção Noroeste é $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$. Assim,

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(50, 80) = \nabla z(50, 80) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{4.2}{\sqrt{2}} \approx -\frac{4.2}{1.4} \approx -3.$$

Logo, como $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(50, 80) < 0$, eu começarei a descer, com taxa $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(50, 80) \approx -3$.

(c) A direção e sentido de máxima inclinação é de $\nabla(50, 80) = (-1\ , -3.2)$. Assim, $\vec{u} = \dfrac{\nabla z(P)}{||\nabla z(P)||}$, com $P = (50, 80)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}(P) &= \nabla z(P) \cdot \frac{\nabla z(P)}{||\nabla z(P)||} = \frac{||\nabla z(P)||^2}{||\nabla z(P)||} = ||\nabla z(P)|| \\
&= \sqrt{(-10^2 + (-3.2)^2} = \sqrt{1 + 10.24} \\
&= \sqrt{11.24}.
\end{aligned}$$

O ângulo que o início desse caminho faz com a horizontal, isto é, o ângulo que $\vec{u}$ faz com a horizontal (eixo $x$ positivo) é $\theta = \pi + arctg(3.2)$.