Instituto de Física
UFRJ

Consórcio cederj
Fundação CECIERJ

2ª Avaliação a Distância de Física 3A - AD2

Segundo Semestre de 2010 - Soluções

1º Q	
2º Q	
3º Q	
4º Q	
Nota	

Pólo : ______________________ Data: ______________

Nome : ______________________________________

Assinatura : ______________________________________

Problema 1 (3pts) A Figura 1 representa uma molécula de água formada por dois átomos de hidrogênio (H) com a configuração eletrônica inicial: $1s^1$), e um átomo de oxigênio (O) com a configuração eletrônica inicial: $1s^2\,2p^6$). Os hidrogênios cedem seus elétrons ao oxigênio que passa ter configuração eletrônica: $1s^2\,2p^8$. Como consequência dessa transferência de elétrons, a molécula de água adquire um momento de dipolo elétrico de magnitude igual a $1,85\,$D (1D=1 debye=$3,34\ \times\ 10^{-30}$ C·m). Faça uma estimativa razoável da distância s entre o centro do átomo de oxigênio e o centro do átomo de hidrogênio e calcule o ângulo θ mostrado na Figura 1. Compare seu resultado com o valor fornecido pelos textos de química geral. Tente entender a discrepância entre o seu resultado e o valor experimental.

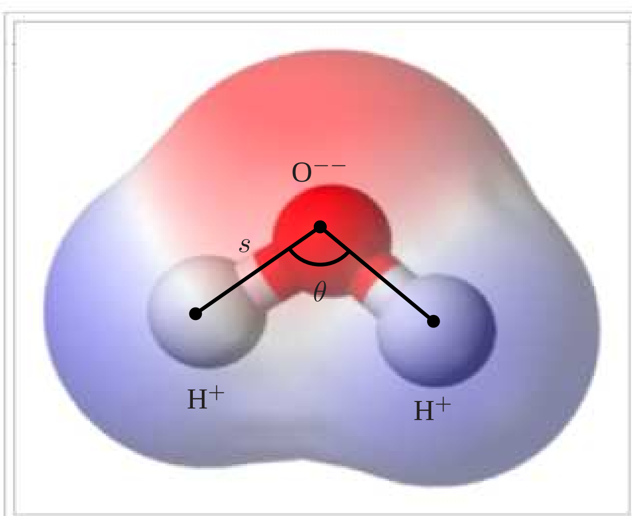

Figura 1: Representação artística de uma molécula de água.

$\boxed{\text{SOLUÇÃO 1:}}$ A magnitude do momento de dipolo elétrico da molécula de água é dada por:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1\,p_2 \cos\,\theta, \tag{1}$$

onde p_k é a magnitude do momento de dipolo correspondente à ligação H^+– O^{--}. Por simetria $p_1 = p_2$, logo:

$$p^2 = 2p_1^2\,(1 + \cos\,\theta)\,. \tag{2}$$

Como $1 + \cos\,\theta = 2\cos^2(\theta/2)$, segue que:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\frac{p}{2p_1}. \tag{3}$$

Para completar o cálculo temos de estimar p_1. A carga do elétron vale $1,60\,\times\,10^{-19}$ C. A ordem de grandeza da separação interatômica é de $1\,\AA$ (1 angostrom) ou $1,0\,\times\,10^{-10}$ m, segue que $p_1 \approx 1,60\,\times\,10^{-19}$ C $\times\,1,0\,\times\,10^{-10}$ m $= 4,79\,$D. Segue que:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\frac{1,85}{2\,\times\,4.79} = 0,193. \tag{4}$$

Portanto:

$$\frac{\theta}{2} = 78,9 \quad\Rightarrow\quad \theta = 158\,\text{graus}.$$

O resultado experimental é $104,7\,$graus. Como a carga do elétron é experimentalmente bem determinada, a fonte da discrepância é a distância s cujo valor médio só pode ser calculado com confiabilidade se os efeitos quânticos forem levados em conta.

Problema 2 A Figura 2 mostra um modelo clássico simplificado para a distribuição de carga de uma molécula.

(a) (1pt) Calcule o potencial da distribuição no ponto P mostrado na figura.

(b) (1 pt) Calcule o campo elétrico a partir do potencial.

(c) (2 pts) Suponha $h \gg d$. Obtenha uma expressão aproximada para o potencial.

(d) (1 pt) Use a aproximação obtida para calcular a força sobre um elétron de carga igual a $-e$ colocado no ponto P.

(e) (1 pt) O resultado aproximado que você obteve para o potencial (e, consequentemente para o campo) representa um potencial de quadrupolo. Explique por que razão não você não obtém termos que correspondam ao monopolo e ao dipolo elétricos.

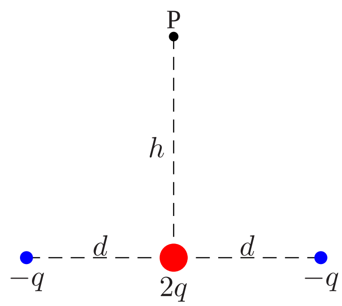

Figura 2: Quadrupolo elétrico.

Sugestão: A expansão binomial,

$$(1+x)^p = 1 + \frac{p}{1!}\,x + \frac{p(p-1)}{2!}\,x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}\,x^3 + \cdots,$$

pode ser-lhe útil.

SOLUÇÃO 2:

(a) Pelo princípio da superposição:

$$V\left(P\right) = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ \sqrt{h^2+d^2}} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ h}.$$

(b)

$$E\left(P\right) = -\frac{\partial V}{\partial h},$$

logo,

$$E\left(P\right) = -\frac{2qh}{4\pi\epsilon_0\ \left(h^2+d^2\right)^{3/2}} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ h^2}$$

(c) Escrevendo:

$$V\left(P\right) = -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ h}\left(1+\frac{h^2}{d^2}\right)^{-1/2} + \frac{2q}{4\pi\epsilon_0\ h},$$

e fazendo uso da expansão binomial com $p = -1/2$ e $x = h^2/d^2$, obtemos:

$$V\left(P\right) \approx \frac{qd^3}{4\pi\epsilon_0\ h^3}.$$

(d) Como

$$E\left(P\right) = -\frac{\partial V}{\partial h},$$

segue que:

$$E\left(P\right) = \frac{3}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{qd^2}{h^4}.$$

A força sobre o elétron será:

$$F = -eE = -\frac{3}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{eqd^2}{h^4}.$$

(e) Não há termo de monopolo porque a carga total da distribuição é zero. Os vetores de dipolo elétrico possuem a mesma magnitude qd, mesma direção, mas sentidos opostos, logo, cancelam-se mutuamente. O primeiro termo relevante é o termo que representa um quadrupolo elétrico.

Problema 3 Considere uma distribuição de carga esfericamente simétrica de raio R com uma densidade de carga dada por

$$\rho = \begin{cases} \kappa\, r & 0 \leq r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

(a) (1pt) Calcule o campo elétrico em um ponto no interior da distribuição.

(b) (1pt) Calcule o campo elétrico em um ponto exterior à distribuição.

SOLUÇÃO 3:

(a) Como temos simetria esférica, podemos escrever a lei de Gauss como segue:

$$E\,4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0},$$

onde $q(r)$ é a carga encerrada pela superfície gaussiana de raio $r < R$:

$$q(r) = \int_{\mathcal{R}} \rho\, dV = 4\pi\kappa \int_0^r r'^3 dr',$$

onde escrevemos $dV = 4\pi r^2$, e fizemos a distinção entre a variável de integração e o limite de integração. Segue que:

$$E = \frac{\kappa\, r^2}{4\epsilon_0}.$$

Este resultado vale para $0 \leq r < R$, isto é: no interior da superfície esférica.

(b) Escolhendo uma superfície gaussiana com raio $r > R$, a carga encerrada será a carga total da distribuição:

$$q = \pi\kappa R^4,$$

e o campo então será dado por:

$$E = \frac{\kappa\, R^4}{4\epsilon_0\, r^2}.$$

O resultado vale para $r > R$, mas, observe que o campo é contínuo em $r = R$. Isto é verdadeiro para distribuições de carga, mas falso para condutores.