Consórcio cederj Fundação CECIERJ
Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

AP3– Equações Diferenciais – 2009/2

Soluções!

Questão 1 [2,5 pts]

Resolva a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

Solução: A equação dada pode ser escrita na forma

$$y\,\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{(1+x^2)x}$$

Integrando o lado esquerdo com relação a y e o direito com relação a x, obtemos

$$\int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx,$$

ou seja

$$\frac{1}{2}\,ln(1+y^2) + c = \int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx, \qquad c \text{ constante} \qquad (3)$$

Para resolver a integralda direita precisamos decompor o integrando em frações parciais,

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}, \qquad A,B,C \in \mathbb{R}$$

Igualando os numeradores:

$$A+B=0, \qquad C=0 \qquad \text{e} \qquad A=1$$

Assim, os valores das constantes são

$$A=1, \qquad B=-1 \qquad \text{e} \qquad C=0,$$

e

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Portanto,

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2} = ln(x) - \frac{1}{2}\,ln(1+x^2) + c_1,$$

onde c_1 é uma constante.

Adicionando uma constante de integração k_1 e substituindo em (3), chegamos a

$$\frac{1}{2}\,ln(1+y^2) = ln(x) - \frac{1}{2}\,ln(1+x^2) + k_1.$$

Finalmente, observando que o contra-domínio da função $x \mapsto ln(x)$ é o conjunto $\mathbb{R}$, podemos garantir que $k_1 = ln(k)$ para algum número positivo k. Assim, a última igualdade pode reescrita como

$$\frac{1}{2}\,ln(1+y^2) \quad = \quad ln(x) - \frac{1}{2}\,ln(1+x^2) + ln(k).$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} ln(1+y^2) &= 2\cdot ln(x) - ln(1+x^2) + 2\cdot ln(k), \\ ln(1+y^2) &= ln\left(\frac{x^2k^2}{x^2+1}\right) \\ 1+y^2 &= \frac{x^2c}{x^2+1}, \qquad c = k^2 \end{aligned}$$

Observe que não é possível explicitar y em função de x de maneira única. Temos

$$y = \pm\sqrt{\frac{cx^2}{x^2+1} - 1}$$

Questão 2 [2,5 pts]

Resolva

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x-y^2}$$

Solução: $M(x,y) = -(x-y), \qquad N(x,y) = x - y^2.$

Então

$$M_y = 1 = N_x$$

de modo que a equação é fechada em $\mathbb{R}^2$. Portanto é exata.

Existe uma $\varphi(x,y)$ tal que $\varphi_x = M$ e $\varphi_y = N$.

$$\begin{aligned} \varphi_x = M = -x + y \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x,y) = \int [-x+y]\; dx + h(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi(x,y) = -\frac{x^2}{2} + yx + h(y) \end{aligned}$$

Ora, $\varphi_y = N = x - y^2$.
Isto é $\dfrac{d}{dy}\Big[-\dfrac{x^2}{2} + yx + h(y) \Big]$ é igual a $x - y^2$. Assim,

$$x + h'(y) = x - y^2$$

de onde concluímos que $h'(y) = -y^2$ e portanto

$$h(y) = -\frac{y^3}{3} + C_1$$

Então

$$\varphi(x,y) = -\frac{x^2}{2} + yx - \frac{y^3}{3} + C_1$$

E as soluções da equação dada são definidas por

$$-\frac{x^2}{2} + yx - \frac{y^3}{3} + C_1 = C_2$$

ou (englobando as duas constantes numa só)

$$-\frac{x^2}{2} + yx - \frac{y^3}{3} = C$$

Questão 3 [2,5 pts]
Achar a a solução geral de

$$y'' - 5y' + 6y = e^x$$

Solução: A solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1\ e^{2x} + c_2\ e^{3x}.$$

Temos então $W[(e^{2x}, e^{3x}] = e^{5x}$, e a solução particular é

$$y_p(x) = c_1(x)\ e^{2x} + c_2(x)\ e^{3x},$$

onde

$$c_1(x) = -\int \frac{e^x e^{3x}}{e^{5x}}\ dx = e^{-x},$$

$$c_2(x) = \int \frac{e^x e^{2x}}{e^{5x}}\ dx = -\frac{1}{2}e^{-2x})$$

Assim,

$$y_p(x) = e^{-x}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}e^{3x} = \frac{1}{2}e^x$$

E a solução geral de $y'' - 5y' + 6y = e^x$ é

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \frac{1}{2}e^x$$

Questão 4 [2,5 pts]
Determine a solução geral do sistema não-homogêneo

$$Y' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$$

Solução: O sistema é de coeficientes constantes. Portanto sabemos calcular a solução geral do sistema homogêneo associado.

Deixamos a seu cargo verificar que os autovalores da matriz do sistema são $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$ e que, por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ são autovetores associados respectivamente a $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$.

Portanto a solução geral do sistema homogêneo associado é

$$Y_H(t) = c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}}_{Y_1(t)} + c_2 \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}}_{Y_2(t)}$$

O determinante da matriz cujas colunas são $Y_1(t)$ e $Y_2(t)$ é

$$\text{det (col}[Y_1(t)Y_2(t)]\text{)} = \text{det}\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} = 2e^{-4t}$$

As fórmulas da aula dezenove nos dão diretamente

$$u'(t) = \frac{\text{det}\begin{pmatrix} 2e^{-t} & e^{-t} \\ 3t & e^{-t} \end{pmatrix}}{2e^{-4t}} \quad \text{e} \quad v'(t) = \frac{\text{det}\begin{pmatrix} e^{-3t} & 2e^{-t} \\ -e^{-3t} & 3t \end{pmatrix}}{2e^{-4t}}$$

Isto é

$$u'(t) = e^{2t} - \frac{3}{2}te^{3t} \qquad \text{e} \qquad v'(t) = 1 + \frac{3}{2}te^{t}$$

Portanto

$$u(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} \quad \text{e} \quad v(t) = t + \frac{3}{2}te^{t} - \frac{3}{2}e^{t},$$

e uma solução particular do sistema dado é

$$\begin{aligned} Y_P(t) &= (\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t})Y_1(t) + (t + \frac{3}{2}te^{t} - \frac{3}{2}e^{t})Y_2(t) \\ &= \begin{pmatrix} (t+\frac{1}{2})e^{-t} + t - \frac{4}{3} \\ (t-2)e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente, a solução geral do sistema não-homogêneo é

$$Y(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} (t+\frac{1}{2})e^{-t} + t - \frac{4}{3} \\ (t-2)e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$
