

AP3- CÁLCULO II- 2010/2 GABARITO

1ª Questão (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

a) (1,5 ponto) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}} dx$

b) (1,5 ponto) $\int \frac{5t+2}{t^2-5t+6} dt$

Solução

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}} dx$

Seja $u = 1 - 2x^2$. Então $du = -4x dx$, portanto $x dx = -\frac{du}{4}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}} dx = -\frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = -\frac{1}{4} \int u^{-1/2} du = -\frac{1}{4} \frac{u^{1/2}}{(1/2)} + C = -\frac{1}{2} \sqrt{u} + C = -\frac{1}{2} \sqrt{1-2x^2} + C.$$

b) $\int \frac{5t+2}{t^2-5t+6} dt$

A função $f(t) = \frac{5t+2}{t^2-5t+6}$ é uma função racional própria. O denominador tem dois fatores lineares distintos, logo a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{5t+2}{t^2-5t+6} = \frac{5t+2}{(t-3)(t-2)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-2} \quad (*)$$

Para determinar os valores de A e B multiplicamos ambos os lados da expressão (*) pelo produto dos denominadores $(t-3)(t-2)$, obtendo

$$5t+2 = A(t-2) + B(t-3) \quad (**)$$

Se $t = 2$ em (**) obtemos:

$$5(2)+2 = 0 + B(2-3) \Rightarrow 12 = -B \Rightarrow B = -12 \quad (1)$$

Também, se $t = 3$ em (**) tem-se:

$$5(3)+2 = A(3-2) + 0 \Rightarrow A = 17 \quad (2)$$

Substituindo em (*) os valores achados em (1) e (2) temos

$$\frac{5t+2}{t^2-5t+6} = \frac{17}{t-3} + \frac{-12}{t-2}$$

Assim

$$\int \frac{5t+2}{t^2-5t+6} dt = \int \frac{17}{t-3} dt + \int \frac{-12}{t-2} dt = 17 \ln |t-3| - 12 \ln |t-2| + C$$

2ª Questão (3,0 pontos).

Seja R a região limitada por $y = x - x^2$ e $y = 0$

a) (1,0 ponto) Esboce R

b) (1,0 ponto) Calcule a área de R .

c) (1,0 ponto) Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da região R em torno do eixo Oy .

Solução

a) Esboço da região R

$y = x - x^2 = -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4} = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$. Assim o gráfico é uma parábola de vértice

$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ que abre para baixo e intersecta o eixo x em $x = 0$ e $x = 1$. A região é mostrada na figura

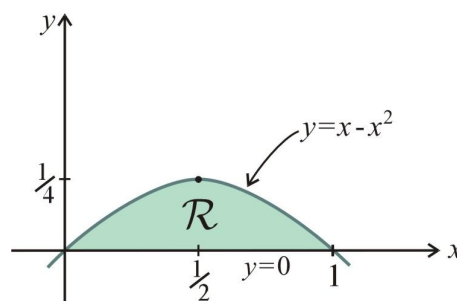


Figura 1

b)

$$A(R) = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ unidades de área.}$$

b) Usaremos o método das cascas cilíndricas

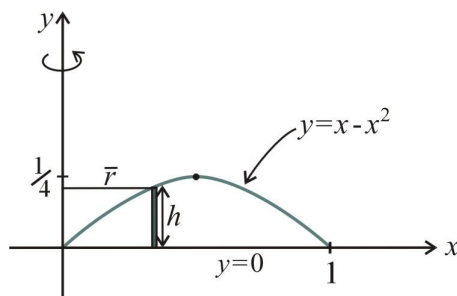


Figura 2

$$V = 2\pi \int_0^1 \bar{r}(x)h(x)dx \quad \text{onde} \quad \bar{r}(x) = x \quad \text{e} \quad h(x) = x - x^2$$

$$V(R) = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)dx = 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6} \text{ unidades de}$$

volume.

3ª Questão (1,0 ponto) Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$$

Solução

Observe que $1+e^{-x} > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Considere $x > 0$, então $\frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0$

Por outro lado dos exemplos referenciais sabemos que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ é divergente, logo pelo critério

da comparação podemos afirmar que $\int_1^{+\infty} \frac{1+e^{-x}}{x} dx$ é divergente.

4ª Questão (3,0 pontos)

a) (1,5 ponto) Encontre $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{9^t - 5^t}{t}, \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \right)$ se existir.

b) (1,5 ponto) A curva C definida pela equação $\alpha(t) = (e^{\sqrt{t}}, t - \ln t^2)$. Determine uma parametrização $\gamma(\lambda)$ para a reta tangente à curva C no ponto $\alpha(1)$. Encontre também uma equação cartesiana da reta.

Solução

a) Observe que quando $t \rightarrow 0$, $\frac{9^t - 5^t}{t}$ é uma forma indeterminada da forma $\frac{0}{0}$, assim estamos nas condições de aplicar a regra de L'Hôpital e temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{9^t - 5^t}{t} \stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{9^t \ln 9 - 5^t \ln 5}{1} = \ln 9 - \ln 5 = \ln \frac{9}{5}$$

Analogamente quando $t \rightarrow 0$, $\frac{e^t - 1 - t}{t^2}$ é uma forma indeterminada da forma $\frac{0}{0}$, assim estamos nas condições de aplicar a regra de L'Hôpital e temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{2t} \stackrel{L'H}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t}{2} = \frac{1}{2}$$

Portanto $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{9^t - 5^t}{t}, \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \right) = \left(\ln \frac{9}{5}, \frac{1}{2} \right).$

b) Uma parametrização da reta tangente à curva $C: \alpha(t) = (e^{\sqrt{t}}, t - \ln t^2)$, no ponto $\alpha(1)$ é dada por $\gamma(\lambda) = \alpha(1) + \lambda \alpha'(1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(1) = (e, \underbrace{1 - \ln 1^2}_0) = (e, 1), \quad \alpha'(t) = (e^{\sqrt{t}} \frac{1}{2\sqrt{t}}, 1 - \frac{2}{t}) \text{ logo } \alpha'(1) = \left(\frac{e}{2}, -1 \right)$$

Portanto uma parametrização da reta tangente l à curva no ponto $\alpha(1)$ é dada por

$$l: \gamma(\lambda) = (e, 1) + \lambda \left(\frac{e}{2}, -1 \right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou}$$

$$l: \gamma(\lambda) = (\underbrace{x(\lambda)}_x, \underbrace{y(\lambda)}_y) = \left(e + \lambda \frac{e}{2}, 1 - \lambda \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para achar uma equação cartesiana da reta l , eliminamos o parâmetro λ . Assim

$$\begin{cases} x = e + \lambda \frac{e}{2} \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow x - e = \frac{e}{2}(1 - y), \text{ de onde } y = -\frac{2}{e}x + 3 \text{ é uma equação cartesiana da}$$

reta l .