

AP2- CÁLCULO II - 2014/1 Gabarito

Solução da 1ª Questão (2,5 pontos).

(a) (1,0 ponto)

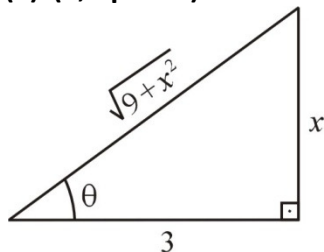


Figura 1

Do triângulo retângulo associado tem-se:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \operatorname{tg} \theta \\ dx = 3 \sec^2 \theta d\theta \end{cases} \cdot \text{Também } \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} = \sec \theta \Rightarrow \sqrt{9+x^2} = 3 \sec \theta$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \int \frac{3 \sec^2 \theta d\theta}{3 \sec \theta} = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C_1 \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C_1 = \ln |\sqrt{9+x^2} + x| + C. \end{aligned}$$

(b) (1,5 ponto)

$$\int \frac{4x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} dx$$

Note que a função racional é própria. Por outro lado $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ é o produto de um fator linear não repetido x e um fator quadrático irredutível $(x^2 + 4)$, pois $b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(4) < 0$.

$$\frac{4x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 4)} \quad (*)$$

Para determinar os valores de A , B e C multiplicamos ambos os lados da expressão (*) pelo produto dos denominadores $x(x^2 + 4)$, obtendo

$$4x^2 + 2x + 4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$4x^2 + 2x + 4 = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

$$\text{Assim da igualdade de polinômios temos: } \begin{cases} A + B = 4 & (1) \\ C = 2 & (2) \\ 4A = 4 & (3) \end{cases}$$

De (3) temos

$$A = 1 \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1) temos

$$B = 3 \quad (5)$$

Substituindo os valores das constantes em (*) obtemos

$$\frac{4x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{3x + 2}{(x^2 + 4)}.$$

Assim

$$\int \frac{4x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{dx}{x} + 3 \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + 2 \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \ln |x| + \frac{3}{2} \ln (x^2 + 4) + 2 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + C$$

Portanto

$$\int \frac{4x^2 + 2x + 4}{x^3 + 4x} dx = \ln |x| + \frac{3}{2} \ln (x^2 + 4) + 2 \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) + C.$$

Solução da 2ª Questão (2,0 pontos).

(a) (1,0 ponto) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_e^t \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln x}}$

Vamos calcular $\int_e^t \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln x}}$

Note que $x \geq e > 0$. Faça a substituição $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, se $x = e \Rightarrow u = \ln e = 1$ e se $x = t \Rightarrow u = \ln t$, logo

$$\int_e^t \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln x}} = \int_1^{\ln t} \frac{du}{u \sqrt{u}} = \int_1^{\ln t} u^{-3/2} du = \left[\frac{u^{-1/2}}{-1/2} \right]_1^{\ln t} = -\frac{2}{(\ln t)^{1/2}} + 2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_e^t \frac{dx}{x \ln x \sqrt{\ln x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{\ln t}} \right) = 2, \text{ pois } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\ln t}} \right) = 0.$$

(b) (1,0 ponto).

A integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado. Temos também que

$$\int_2^{+\infty} (x^6 - 1)^{-1/7} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x^6 - 1)^{1/7}} dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{x^6 - 1}} dx$$

Usaremos o critério de comparação no limite.

Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x^6 - 1}} > 0$ e seja, por exemplo, $g(x) = \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}} > 0$ para $x \in [2, +\infty)$.

Então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[7]{x^6 - 1}}}{\frac{1}{\sqrt[7]{x^6}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^6 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{1 - \frac{1}{x^6}}} = 1, \text{ é claro que, neste caso,}$$

$L = 1 \in (0, +\infty)$. Logo **pelo critério de comparação no limite** as duas integrais

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{x^6-1}} dx$ e $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{x^6}} dx$ convergem ou as duas divergem. Por outro lado, sabemos dos

exemplos referenciais ou calculando diretamente que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{6/7}} dx$ diverge, pois $6/7 < 1$. Portanto

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{x^6-1}} dx$ diverge.

Solução da 3ª Questão (3,0 pontos).

(a) (2,0 pontos) Mostramos a região pedida na Figura 2. Veja que a interseção das duas curvas $y = 3x^2$ e $y = 4 - 6x^2$ pode ser obtida de $3x^2 = 4 - 6x^2 \Rightarrow 9x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x = \pm \frac{2}{3}$ logo $y = \frac{4}{3}$. Portanto no primeiro quadrante temos que a interseção se dá no ponto $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.

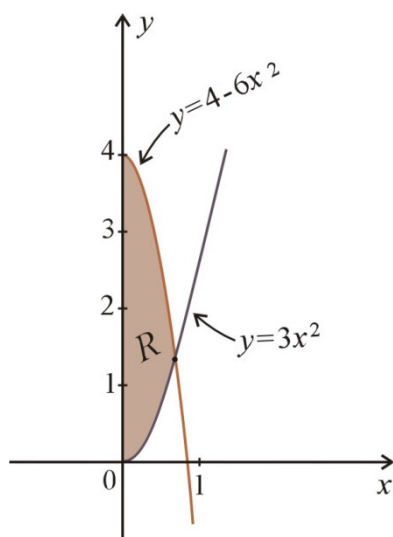


Figura 2

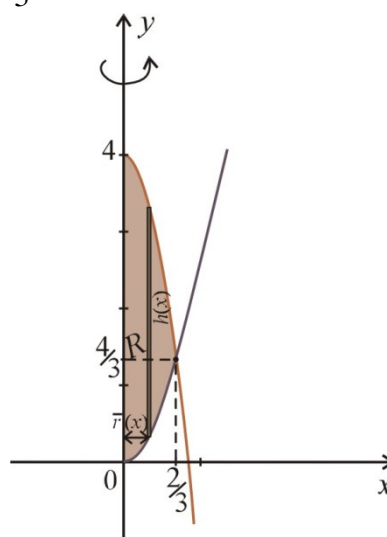


Figura 3

O método mais prático neste caso é o das cascas cilíndricas (veja a Figura 3). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\bar{r}(x)$ onde $h(x) = (4 - 6x^2) - 3x^2 = 4 - 9x^2$ e $\bar{r}(x) = x$ para $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$. O volume é dado pela fórmula

$$V = 2\pi \int_a^b \bar{r}(x) h(x) dx. \text{ Assim, o volume é } V = 2\pi \int_0^{2/3} x(4 - 9x^2) dx = 2\pi \int_0^{2/3} (4x - 9x^3) dx$$

$$V = 2\pi \left(4 \frac{x^2}{2} - 9 \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{2/3} = 2\pi \left(\frac{8}{9} - \frac{4}{9} \right) = \frac{8\pi}{9} \text{ unidades de volume.}$$

O problema poderá também ser resolvido pelo método dos discos nesse caso será necessário dividir a região dada em duas sub-regiões, considerar os retângulos típicos horizontais e expressar em cada região as curvas dadas em função de y .

(b) (1,0 ponto)

$$y = \frac{1}{3}(2+x^2)^{3/2} \text{ para } 0 \leq x \leq 3, \text{ logo } y' = \frac{1}{3} \frac{3}{2} (2+x^2)^{1/2} (2x) = x(2+x^2)^{1/2}$$

Assim

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = \int_0^3 \sqrt{1+x^2(2+x^2)} dx = \int_0^3 \sqrt{1+2x^2+x^4} dx$$

$$L = \int_0^3 \sqrt{(1+x^2)^2} dx = \int_0^3 (1+x^2) dx = x + \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 3+9=12.$$

Solução da 4ª Questão (2,5 pontos)

(a) (1,5 ponto) $y \frac{dy}{dx} = x(y^2+1)^2$, tal que $y=1$ quando $x=4$.

$$y \frac{dy}{(y^2+1)^2} = x dx \Rightarrow \int y \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \int x dx \quad (*)$$

Faça $u = (y^2+1) \Rightarrow du = 2y dy$ logo $\int y \frac{dy}{(y^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{-1}}{-1} \right) + C_0 = -\frac{1}{2(y^2+1)} + C_0$

Substituindo em (*) temos $\Rightarrow -\frac{1}{2(y^2+1)} = \frac{x^2}{2} + C$. Por outro lado $y=1$ quando $x=4$, logo

$$-\frac{1}{2(1^2+1)} = \frac{4^2}{2} + C \Rightarrow -\frac{1}{4} = \frac{4^2}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{33}{4} \text{ logo } -\frac{1}{2(y^2+1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{33}{4} \text{ ou } y = \sqrt{\frac{2x^2-31}{33-2x^2}}.$$

(a) (1,0 ponto) $x y' + 3y = \frac{\sin x}{x^2}$, $x > 0$.

Como $x > 0$, escrevemos a equação na forma padrão da equação linear de primeira ordem

$$y' + \frac{3}{x} y = \frac{\sin x}{x^3}, \text{ onde } p(x) = \frac{3}{x} \text{ e } q(x) = \frac{\sin x}{x^3} \text{ sendo } p \text{ e } q \text{ funções contínuas em}$$

$I = (0, +\infty)$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula. Note que

$$\int p(x) dx = \int \frac{3}{x} dx = 3 \ln |x| = \ln x^3 \quad x \in I, \text{ pois } x > 0 \text{ em } I = (0, +\infty).$$

Assim, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\ln x^3} = x^3$, $x \in I$. Logo, multiplicando a equação diferencial pelo fator $\mu(x)$, resulta:

$$\underbrace{x^3 \frac{dy}{dx} + 3x^2 y}_{\frac{d}{dx}(x^3 y)} = \underbrace{x^3 \frac{\sin x}{x^3}}_{\sin x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x^3 y) = \sin x \Rightarrow x^3 y = \int \sin x dx \Rightarrow x^3 y = -\cos x + C, \text{ onde } C \text{ é uma}$$

constante arbitrária.

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{x^3} \cos x + \frac{C}{x^3}, \text{ ou } \Rightarrow y = \frac{C - \cos x}{x^3}, \quad x > 0 \text{ é a solução geral da equação diferencial linear dada.}$$