

Cálculo II – AD2 (2011/2) - Gabarito

Solução da Questão 1 a)

- a) Note que o denominador possui uma expressão da forma $a^2 - u^2$, com $a = 2$ e $u = x$, o que sugere aplicar uma mudança de variáveis via método de substituição trigonométrica usando a função seno (ou cosseno), como mostra o triângulo associado da figura 1.1 a seguir

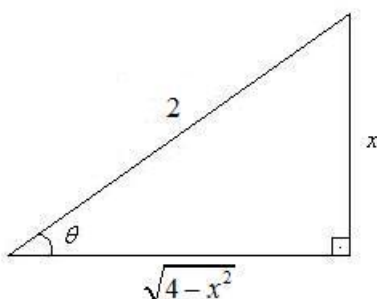


Figura 1.1

$$\text{Assim } \operatorname{sen} \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} \theta \\ dx = 2 \cos \theta d\theta \end{cases}. \quad \text{E ainda: } \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} \\ 4-x^2 = 4 \cos^2 \theta \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Veamos como mudam os limites de integração: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ x = \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (**)$$

Calculando inicialmente a integral indefinida, fica:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(4-x^2)^{9/2}} dx &\stackrel{(*)}{=} \int \frac{8 \operatorname{sen}^3 \theta \cdot 2 \cos \theta}{(4 \cos^2 \theta)^{9/2}} d\theta = \int \frac{16 \operatorname{sen}^3 \theta \cdot \cos \theta}{512 \cos^9 \theta} d\theta = \frac{1}{32} \int \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{\cos^8 \theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{32} \int \frac{\operatorname{sen} \theta \cdot \operatorname{sen}^2 \theta}{\cos^8 \theta} d\theta = \frac{1}{32} \int \frac{\operatorname{sen} \theta \cdot (1 - \cos^2 \theta)}{\cos^8 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Nesta última integral, fazendo a substituição $u = \cos \theta \Rightarrow du = -\operatorname{sen} \theta d\theta$, fica

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(4-x^2)^{9/2}} dx &= \frac{1}{32} \int \frac{\sin \theta (1-\cos^2 \theta)}{\cos^8 \theta} d\theta = \frac{1}{32} \int \frac{(1-u^2)}{u^8} (-du) = \\
\frac{1}{32} \int \left(\frac{1}{u^6} - \frac{1}{u^8} \right) du &= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{-5u^5} - \frac{1}{-7u^7} \right) = \frac{1}{32} \left(\frac{1}{7u^7} - \frac{1}{5u^5} \right) = \frac{1}{1120u^7} 5 - 7u^2 = \\
&= \frac{1}{1120 \cos^7 \theta} 5 - 7 \cos^2 \theta \quad (***)
\end{aligned}$$

De volta a integral definida, usando a mudança dos extremos de integração em (**), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^3}{(4-x^2)^{9/2}} dx &= \frac{1}{32} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta (1-\cos^2 \theta)}{\cos^8 \theta} d\theta \stackrel{(***)}{=} \left[\frac{1}{1120 \cos^7 \theta} 5 - 7 \cos^2 \theta \right]_0^{\pi/4} = \\
&= \frac{1}{1120} \left\{ \left[\frac{1}{(\sqrt{2}/2)^7} 5 - 7(\sqrt{2}/2)^2 \right] - [5 - 7] \right\} = \frac{6\sqrt{2}+1}{560}
\end{aligned}$$

Obs: poderíamos também usar uma substituição simples para calcular a integral indefinida

$$\int \frac{x^3}{(4-x^2)^{9/2}} dx$$

Fazendo $u = 4 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{du}{2}$, temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(4-x^2)^{9/2}} dx &= \int \frac{x^2 \cdot x}{(4-x^2)^{9/2}} dx = \int \frac{(4-u)}{u^{9/2}} \left(-\frac{du}{2} \right) = \int \frac{u^{-7/2}}{2} du - \int \frac{2u^{-9/2}}{2} du = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-5/2}}{(-5/2)} - 2 \cdot \frac{u^{-7/2}}{(-7/2)} = \frac{4}{7} u^{-7/2} - \frac{1}{5} u^{-5/2} \stackrel{u=4-x^2}{=} \frac{4}{7} (4-x^2)^{-7/2} - \frac{1}{5} (4-x^2)^{-5/2} = (4-x^2)^{-7/2} \left[\frac{4}{7} - \frac{1}{5} (4-x^2) \right] = \\
&= \frac{(4-x^2)^{-7/2}}{35} [7x^2 - 8]
\end{aligned}$$

Podemos então calcular a integral definida solicitada, usando o TFC:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x^3}{(4-x^2)^{9/2}} dx = \left[\frac{(4-x^2)^{-7/2}}{35} [7x^2 - 8] \right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}+1}{560}$$

Solução da Questão 1 b)

Em primeiro lugar, observamos que o integrando não é uma fração própria. Devemos portanto, inicialmente, efetuar a divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r|l} 3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1 & x^5 + 2x^3 + x \\ -3x^7 - 6x^5 - 3x^3 & 3x^2 \\ \hline \text{Resto } 1 & \end{array}$$

Assim $3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1 = 3x^2(x^5 + 2x^3 + x) + 1$ e portanto

$$\frac{3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{3x^2(x^5 + 2x^3 + x) + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = 3x^2 + \frac{1}{x^5 + 2x^3 + x}$$

O denominador da última fração pode ser fatorado como

$$x^5 + 2x^3 + x = x(x^4 + 2x^2 + 1) = x(x^2 + 1)^2,$$

logo

$$\frac{3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = 3x^2 + \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} \quad (a)$$

Vamos decompor esta última fração em frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{A(x^2 + 1)^2 + x(Bx + C)(x^2 + 1) + x(Dx + E)}{x(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{(A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A}{x(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Igualando os numeradores, devemos ter

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 2A + B + D = 0 \\ C + E = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -1 \\ E = 0 \end{cases} \Rightarrow D = -1$$

Logo

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Substituindo em (a), fica:

$$\frac{3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

De volta a integral indefinida, temos portanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} dx &= \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx = \\ &= x^3 + \ln |x| - \underbrace{\int \frac{x}{x^2 + 1} dx}_{(1)} - \underbrace{\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx}_{(2)} \end{aligned} \quad (*)$$

Nas integrais (1) e (2), podemos usar simultaneamente a substituição simples

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2} \text{ e fica}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \frac{x}{x^2 + 1} dx}_{(1)} &= \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} \ln |u| = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1|, \text{ e} \\ \underbrace{\int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx}_{(2)} &= \int \frac{du}{2u^2} = -\frac{1}{2u} = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} \end{aligned}$$

Substituindo em (*), tem-se

$$\int \frac{3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} dx = x^3 + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C$$

Solução da Questão 2 a)

Por definição, para um valor de $s \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin t \, dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} \sin t \, dt \quad (*)$$

Pelo que foi visto no caderno didático, uma condição necessária para a convergência da integral é que a função $f(t) = e^{-st} \sin t$ satisfaça $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Se $s = 0$, então $f(t) = \sin t$ e não existe, portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Se $s < 0$, então $-s > 0$. Daí $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} = +\infty$ e daí também não existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} \sin t$.

Em particular, se $s \leq 0$, a integral é divergente.

Resta o caso $s > 0$.

Calculemos, para um valor de $T > 0$ fixado, a integral definida em (*). inicialmente, obtenhamos a primitiva

$$\int e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt.$$

Usando integração por partes, façamos

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \operatorname{sen} t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -se^{-st} \, dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

Assim

$$\underbrace{\int e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt}_{(I)} = \underbrace{-e^{-st} \cos t}_{(I)} - \int se^{-st} \cos t \, dt = -e^{-st} \cos t - s \underbrace{\int e^{-st} \cos t \, dt}_{(II)} \quad (**)$$

Usando integração por partes novamente, agora em (II), façamos:

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \cos t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -se^{-st} \, dt \\ v = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

a integral (II) fica $\int e^{-st} \cos t \, dt = \underline{e^{-st} \operatorname{sen} t} + \int se^{-st} \operatorname{sen} t \, dt = e^{-st} \operatorname{sen} t + s \int e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt.$

Substituindo em (**), fica:

$$\underbrace{\int e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt}_{(I)} = -e^{-st} \cos t - s \left(\underline{e^{-st} \operatorname{sen} t} + s \int e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt \right) = -e^{-st} (\cos t + s \operatorname{sen} t) - s^2 \underbrace{\int e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt}_{(I)}$$

Isolando no lado esquerdo os termos comuns contendo a integral (I), fica:

$$\underbrace{(1 + s^2) \int e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt}_{(I)} = -e^{-st} (\cos t + s \operatorname{sen} t) \Rightarrow \int e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt = \frac{-e^{-st}}{1 + s^2} (\cos t + s \operatorname{sen} t) + C.$$

Assim, usando o TFC, a integral definida em (*) fica

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt &= \left[\frac{-e^{-st}}{1 + s^2} (\cos t + s \operatorname{sen} t) \right]_{t=0}^{t=T} = \left[\frac{-e^{-sT}}{1 + s^2} (\cos T + s \operatorname{sen} T) \right] - \left[\frac{-e^{-s \cdot 0}}{1 + s^2} (\cos 0 + s \operatorname{sen} 0) \right] = \\ &= \frac{1}{1 + s^2} [1 - e^{-sT} (\cos T + s \operatorname{sen} T)] \end{aligned}$$

Enfim, substituindo em (*), fica

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+s^2} \left[1 - e^{-sT} (\cos T + s \operatorname{sen} T) \right] = \frac{1}{1+s^2} - \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[e^{-sT} (\cos T + s \operatorname{sen} T) \right].$$

Como estamos considerando o caso $s > 0$, temos que $\lim_{T \rightarrow +\infty} (-sT) = -\infty \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} = 0$.

Como a função $y(t) = \cos t + s \operatorname{sen} t$ é limitada (mais precisamente $|y(t)| \leq 1 + s$, para todo $t \in \mathbb{R}$),

segue que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \left[e^{-sT} (\cos T + s \operatorname{sen} T) \right] = 0$ e portanto $\int_0^{+\infty} e^{-st} \operatorname{sen} t \, dt = \frac{1}{1+s^2}$.

Portanto, a integral é convergente se $s > 0$, e divergente se $s \leq 0$.

Solução da Questão 2 b)

Analisemos a convergência da integral $\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{2+e^{x^2}} dx$.

De acordo com o exemplo 27.6 do caderno didático, se esta última convergir, então a integral dada neste item também será convergente.

Primeiramente, segue de $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ que

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{2+e^{x^2}} \leq \frac{1}{2+e^{x^2}} \quad (1)$$

Em segundo lugar:

$$2+e^{x^2} > e^{x^2} \Rightarrow \frac{1}{2+e^{x^2}} < \frac{1}{e^{x^2}} \quad (2)$$

Agora, para $x \geq 1$ vale que

$$x^2 \geq x \Rightarrow e^{x^2} \geq e^x \Rightarrow \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x} \quad (3)$$

Segue de (1), (2) e (3) que

$$\frac{|\operatorname{sen} x|}{2+e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}, \text{ para todo } x \geq 1. \quad (4)$$

É fácil ver que a integral $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ é convergente, pois

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_1^T = \lim_{T \rightarrow \infty} [e^{-1} - e^{-T}] = e^{-1}$$

Segue então de (4), usando o critério de comparação, que a integral $\int_1^{+\infty} \frac{|\operatorname{sen} x|}{2+e^{x^2}} dx$ é convergente e

consequentemente $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{2+e^{x^2}} dx$ também é convergente.

Solução da Questão 3 a)

A região considerada é mostrada na figura 3.1 a seguir

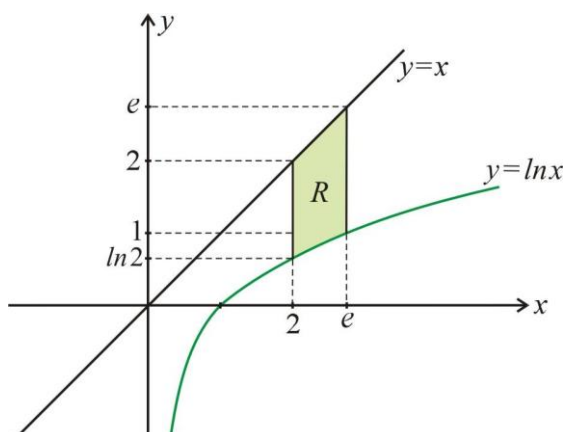


Figura 3.1

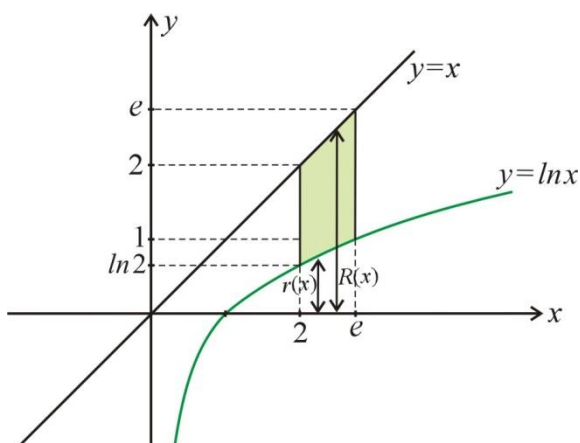


Figura 3.2

Note que o eixo de rotação é o eixo x e **como a integração tem que ser feita em relação a x** , o método dos discos ou arruelas é o indicado. Na figura 3.2 são mostrados os raios da arruela típica correspondente ao problema. O sólido é mostrado na figura 3.3

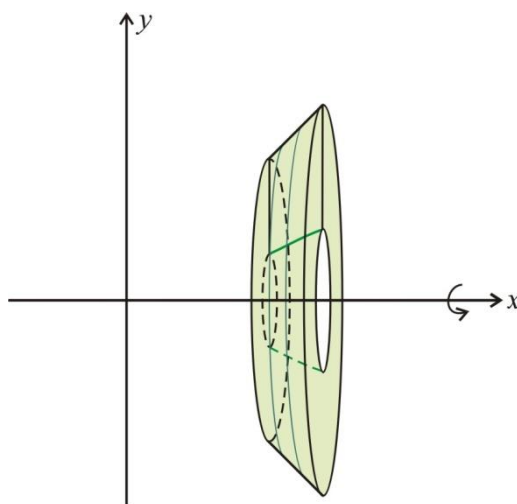


Figura 3.3

Observemos que $R(x) = x$ e $r(x) = \ln x$, em que $2 \leq x \leq e$.

Assim, denotando o volume por V , temos que:

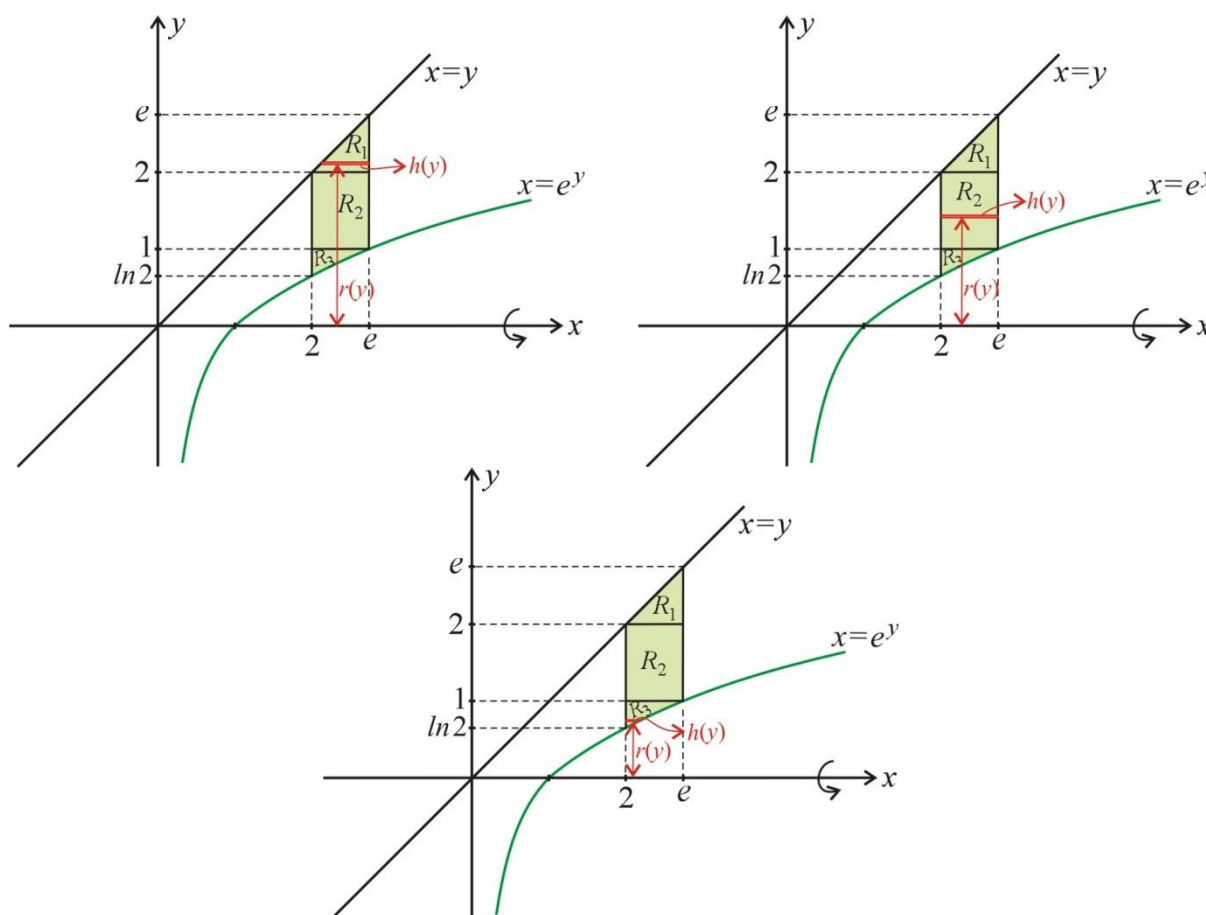
$$V = \pi \int_2^e [(R(x))^2 - (r(x))^2] dx = \pi \int_2^e [x^2 - (\ln x)^2] dx$$

Solução da Questão 3 b)

O sólido é o mesmo exibido na figura 3.3 anterior

Para calcular o volume deste sólido **por integração em relação a y** , observe que o método das cascas cilíndricas é o indicado.

Vamos dividir a região dada em três regiões R_1 , R_2 e R_3 , como mostram as figuras em 3.4 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo x .



Figuras 3.4

Neste caso, na região R_1 para $2 \leq y \leq e$ resulta $r(y) = y$ e $h(y) = e - y$, logo denotando por V_1 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_1 = 2\pi \int_2^e r(y) \cdot h(y) dy = 2\pi \int_2^e y(e - y) dy$$

Na região R_2 para $1 \leq y \leq 2$ resulta $r(y) = y$ e $h(y) = e - 2$, logo denotando por V_2 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_2 = 2\pi \int_1^2 r(y) \cdot h(y) dy = 2\pi \int_1^2 y(e - 2) dy$$

Similarmente, na região R_3 , para $\ln 2 \leq y \leq 1$ resulta $r(y) = y$ e $h(y) = e^y - 2$, logo denotando por V_3 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_3 = 2\pi \int_{\ln 2}^1 r(y).h(y)dy = 2\pi \int_{\ln 2}^1 y(e^y - 2)dy$$

Assim neste caso

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 2\pi \int_2^e y(e - y)dy + 2\pi \int_1^2 y(e - 2)dy + 2\pi \int_{\ln 2}^1 y(e^y - 2)dy$$

Solução da Questão 3 c)

Note que o eixo de rotação é o eixo y e **como a integração tem que ser feita em relação a x** , o método das cascas cilíndricas é o conveniente.

A figura 3.5 mostra a casca típica associada ao problema, em que $h(x) = x - \ln x$ e $r(x) = x$, com $2 \leq x \leq e$.

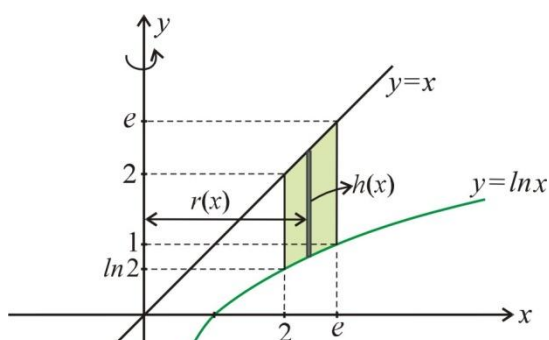


Figura 3.5

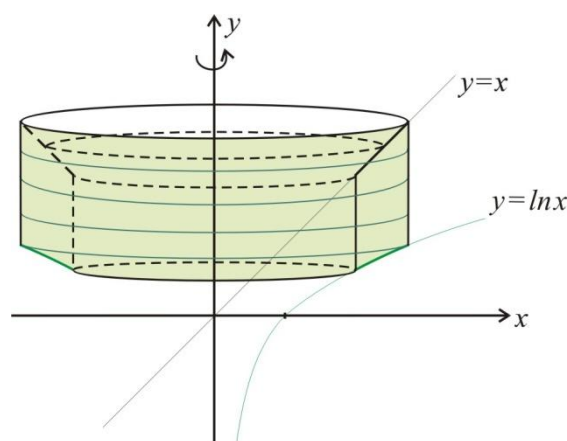


Figura 3.6

Assim, o volume V do sólido é dado por

$$V = 2\pi \int_2^e r(x).h(x)dx = 2\pi \int_2^e x(x - \ln x)dx.$$

O sólido é mostrado na figura 3.6.

Solução da Questão 3 d)

Note que o eixo de rotação é o eixo y e **como a integração tem que ser feita em relação a y** , o método dos discos ou arruelas é o indicado.

Como no item b), vamos dividir a região dada em três regiões R_1 , R_2 e R_3 , como mostra a figura em 3.7 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo y .

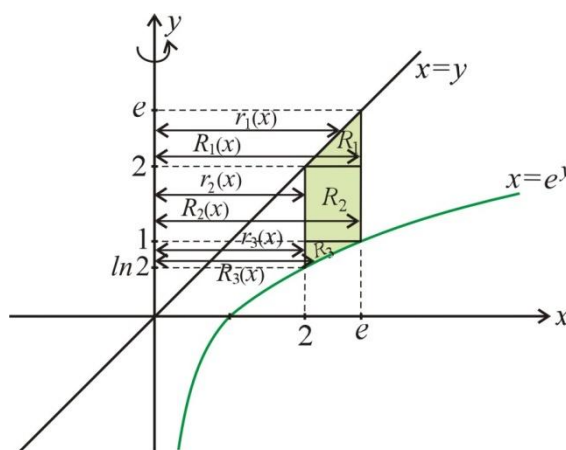


Figura 3.7

O sólido é o mesmo mostrado na figura 3.6

Neste caso, na região R_1 , para $2 \leq y \leq e$, resulta $R(y) = e$ e $r(y) = y$, logo denotando por V_1 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_1 = \pi \int_2^e [R(y)^2 - r(y)^2] dy = \pi \int_2^e (e^2 - y^2) dy$$

Na região R_2 para $1 \leq y \leq 2$ resulta $R(y) = e$ e $r(y) = 2$, logo denotando por V_2 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_2 = \pi \int_1^2 [R(y)^2 - r(y)^2] dy = \pi \int_1^2 (e^2 - 2^2) dy = \pi \int_1^2 (e^2 - 4) dy$$

Analogamente na região R_3 para $\ln 2 \leq y \leq 1$ resulta $R(y) = e^y$ e $r(y) = 2$, logo denotando por V_3 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_3 = \pi \int_{\ln 2}^1 [R(y)^2 - r(y)^2] dy = \pi \int_{\ln 2}^1 [(e^y)^2 - 2^2] dy = \pi \int_{\ln 2}^1 [e^{2y} - 4] dy$$

Assim neste caso

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \pi \int_2^e (e^2 - y^2) dy + \pi \int_1^2 (e^2 - 4) dy + \pi \int_{\ln 2}^1 [e^{2y} - 4] dy.$$

Solução da Questão 3 e)

Note que o eixo de rotação é a reta horizontal $y = e$. Neste caso, o método dos discos ou arruelas é o indicado. Os raios da arruela típica são mostrados na figura 3.8 e o sólido na figura 3.9.

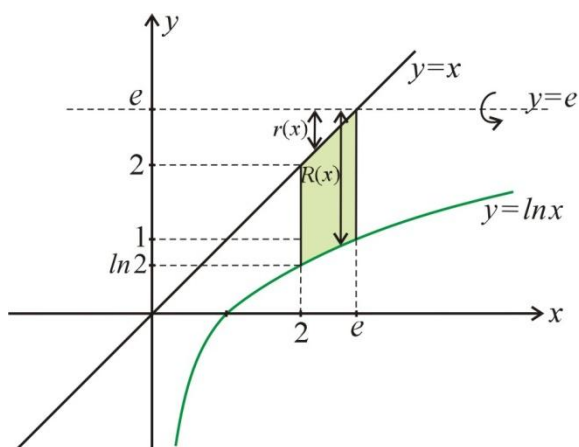


Figura 3.8

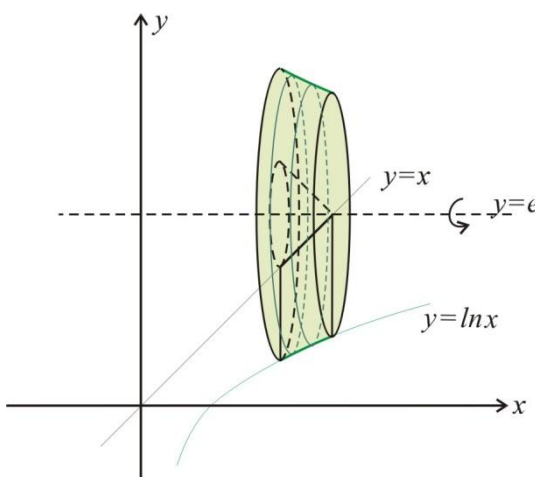


Figura 3.9

Aqui $R(x) = e - \ln x$ e $r(x) = e - x$, com $2 \leq x \leq e$. Assim $(R(x))^2 = (e - \ln x)^2$ e $(r(x))^2 = (e - x)^2$.

Portanto, o volume do sólido é dado por

$$V = \pi \int_2^e [R(x)^2 - r(x)^2] dx = \pi \int_2^e [(e - \ln x)^2 - (e - x)^2] dx.$$

Solução da Questão 3 f)

Note que o eixo de rotação é a reta vertical $x = 2$. Neste caso, o método das cascas cilíndricas se aplica bem. A casca típica é mostrada na figura 3.10 abaixo.

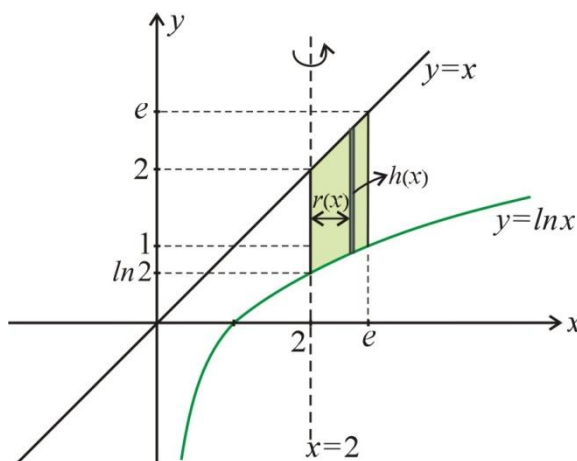


Figura 3.10

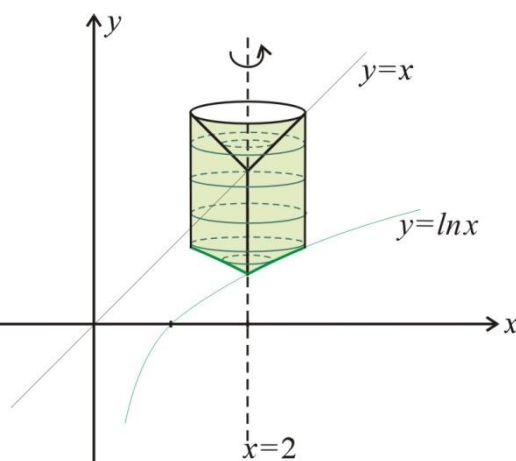


Figura 3.11

Tem-se $h(x) = x - \ln x$ e $r(x) = x - 2$, com $2 \leq x \leq e$. O volume V do sólido é portanto dado por

$$V = 2\pi \int_2^e r(x)h(x)dx = 2\pi \int_2^e (x - 2)(x - \ln x)dx.$$

O sólido é exibido na figura 3.11.

Solução da Questão 4 a)

A solução geral da equação diferencial, isto é, sem considerar o dado inicial, é uma função $y(x)$ cuja derivada é dada por $x^2 e^x$, ou seja

$$y(x) = \int x^2 e^x dx.$$

Para obter esta primitiva, usemos integração por partes, fazendo

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$$

donde resulta

$$\int x^2 e^x dx = \underline{x^2 e^x} - 2 \int x e^x dx \quad (*)$$

Usando integração por partes novamente, agora na última integral em (*), façamos

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

e temos

$$\int x e^x dx = \underline{x e^x} - \int e^x dx = x e^x - e^x.$$

Substituindo em (*), fica

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

Assim $y(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$ é a solução geral da equação diferencial dada.

Agora, queremos a solução específica tal que $y(0) = 4$, mas $y(0) = (0^2 - 2 \cdot 0 + 2)e^0 + C = 2 + C$, o que implica

$2 + C = 4 \Rightarrow \boxed{C = 2}$. Portanto $y(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + 2$ é a solução do PVI dado.

Solução da Questão 4 b)

Como no item anterior, buscamos uma primitiva

$$y(t) = \int \left(\arcsent t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt \quad (*)$$

que seja tal que $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Calculemos $\int \arcsent t dt$.

Usando integração por partes, façamos: $\begin{cases} u = \arcsen t \\ dv = dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ v = t \end{cases}$

Assim $\int \arcsen t \, dt = \underline{t \cdot \arcsen t} - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

que pode ser reescrito como

$$\int \arcsen t \, dt + \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = t \cdot \arcsen t .$$

Portanto, $y(t) = t \cdot \arcsen t + C$ é a solução geral da equação diferencial dada.

Agora, queremos a solução específica que cumpra $y(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Mas,

$$y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \arcsen(\frac{1}{2}) + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + C = \frac{\pi}{12} + C, \text{ o que implica } \frac{\pi}{12} + C = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\pi}{12}}.$$

Portanto $y(t) = t \cdot \arcsen t + \frac{\pi}{12}$ é a solução procurada.