AP2- CÁLCULO II-1/2009 - GABARITO

1ª Questão (2,0 pontos). Calcule o volume do sólido formado pela revolução da região $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 1\le x\le 2,\ 0\le y\le e^x\}$ em torno do eixo Ox. Faça um esboço do sólido de revolução.

Solução

Desenhamos a Figura 1, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Ox). Identificamos a função raio do disco típico $R(x)$, onde neste caso $R(x)=e^x$, para $1\le x\le 2$.

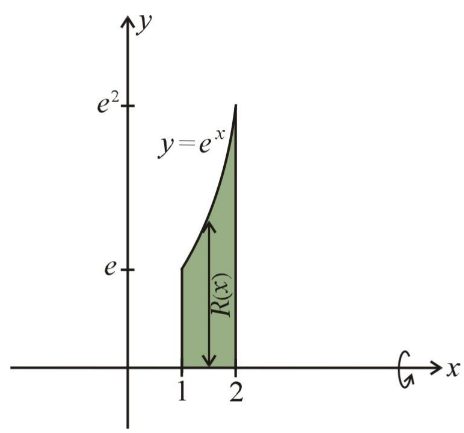

Figura 1

O volume é dado pela fórmula $V=\pi\int_a^b [R(x)]^2\,dx$. Assim o volume é

$$V=\pi\int_1^2 [e^x]^2 dx=\pi\int_1^2 e^{2x}\,dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big]_1^2=\frac{\pi}{2}(e^4-e^2)=\frac{\pi}{2}e^2(e^2-1)$$ unidades de volume.

O esboço do sólido está dado na Figura 2:

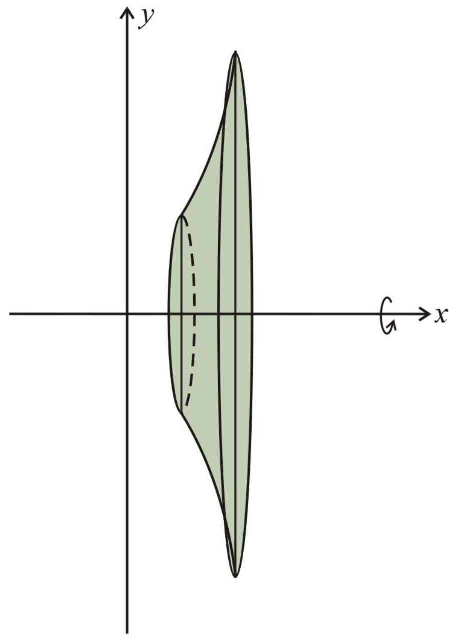

Figura 2

2ª Questão (4,5 pontos) Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int \frac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)}dx$ **b)** $\displaystyle\int \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}dt$ **c)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

Solução

a) (1,5 pontos) $\displaystyle\int \frac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)}dx = \int \left(\frac{A}{(x-2)}+\frac{Bx+C}{(x^2+4)}\right) dx$, onde A, B e C são determinados como segue

$3x^2-3x+2 = A(x^2+4)+(Bx+C)(x-2)$

Se $x=2$, temos $12-6+2=A(8)$, logo $A=1$

Se $x=0$, temos $2=4+(-2C)$, logo $C=1$

Se $x=1$, temos $2=5+(B+1)(-1)$, logo $B=2$

Assim,

$$\int \frac{3x^2-3x+2}{(x-2)(x^2+4)}dx = \int \left(\frac{1}{(x-2)}+\frac{2x+1}{(x^2+4)}\right) dx$$

$$= \ln|x-2| + \int \frac{2x}{(x^2+4)}dx + \int \frac{1}{(x^2+4)}dx$$

$$= \ln|x-2| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b) (1,5 pontos) $\displaystyle\int \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt = \int \frac{t^2}{(\sqrt{1-t^2}\,)^3}\,dt$

Primeiro note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{1-t^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-x^2}$ com $a=1$.

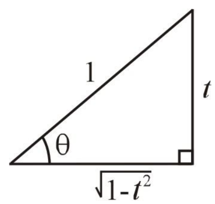

Figura 3

Fazendo a substituição trigonométrica $\begin{cases} t = \text{sen}\,\theta \\ dt = \cos\theta\, d\theta \end{cases}$, temos que $\sqrt{1-t^2} = \cos\theta$.

$$\int \frac{t^2}{(1-t^2)^{3/2}}\,dt = \int \frac{t^2}{(\sqrt{1-t^2}\,)^3}\,dt = \int \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^3\theta}\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int \tan^2\theta\, d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)\,d\theta = \tan\theta - \theta + C$$

$$= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \text{arcsen}(t) + C$$

c) (1,0 ponto) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^{t} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

$$\int_1^{t} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = -\int_1^{t}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x}dx = -e^{1/x}\Big]_1^t = -e^{1/t} + e$$

Assim $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_1^{t} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}(-e^{1/t}) + e = -1 + e = e - 1$

3ª Questão (1,0 ponto) Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+2x+1}\,dx$$

Solução

Note que $f(x)=\dfrac{1}{x^4}>0$ e $g(x)=\dfrac{1}{x^4+2x+1}>0$ em $[1,+\infty)$

Podemos usar o critério do limite do quociente ou também chamado teste de comparação no limite com $f(x)$ e $g(x)$ acima definidas. Como

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^4+2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+2x+1}{x^4}=1\in(0,+\infty)$$. Então as integrais impróprias

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4+2x+1}dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx$ comportam-se da mesma maneira, ou seja, ambas convergem ou ambas divergem. Por outro lado sabemos *do primeiro exemplo referencial das notas de aula, [ou exemplo 27.2 do modulo 2 do caderno didático]* que

“ $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^r}dx$ com $a>0$ converge se $r>1$ e diverge se $r\le 1$.”

Assim neste caso $a=1>0$ e $r=4>1$, logo $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx$ converge. Portanto $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^4+2x+1}dx$ também converge.

4ª Questão (2,5 pontos)

a) (1,0 ponto) Dê uma parametrização para a cônica $(y-3)=(x+1)^2$.

b) (1,5 ponto) Determine uma parametrização para a reta tangente à curva $\alpha(t)=(3t+1,t^2)$ no ponto $t=1$. Encontre também uma equação cartesiana da reta.

Solução

a) Como $y-3=(x+1)^2$ então $y=3+(x+1)^2$. Fazendo $x=t$ então $y=3+(t+1)^2$. Portanto uma parametrização da cônica que neste caso é uma parábola é dada por $\beta(t)=(t\,,3+(t+1)^2)$, $t\in\mathbb{R}$.

b) A reta tangente à curva no ponto $\alpha(1)$, é dada pela seguinte parametrização:
$r(\lambda)=\alpha(1)+\lambda\alpha'(1),\quad \lambda\in\mathbb{R}$,
Como $\alpha(t)=(3t+1,t^2)$, temos que $\alpha(1)=(4,1)$
Como $\alpha'(t)=(3,\,2t)$ então $\alpha'(1)=(3,2)$.
Logo a uma parametrização para a reta tangente à curva é dada por
$r(\lambda)=(4,\,1)+\lambda(3,2)=(4+3\lambda,1+2\lambda),\quad \lambda\in\mathbb{R}$.
Para achar a equação cartesiana da reta tangente faça

$$\begin{cases}x=4+3\lambda\\ y=1+2\lambda\end{cases}\Rightarrow\frac{x-4}{3}=\lambda=\frac{y-1}{2}\quad\Rightarrow 2(x-4)=3(y-1)$$

Assim $2x-3y-5=0$ é a equação cartesiana da reta.