AP1- CÁLCULO II-1/2009 - Gabarito

Atenção: Todas as respostas devem estar acompanhadas das justificativas, mesmo que não exista o que esta sendo pedido.

1ª Questão (1,5 pontos) - Usando integral definida, determine o valor da área da região sombreada na figura 1.

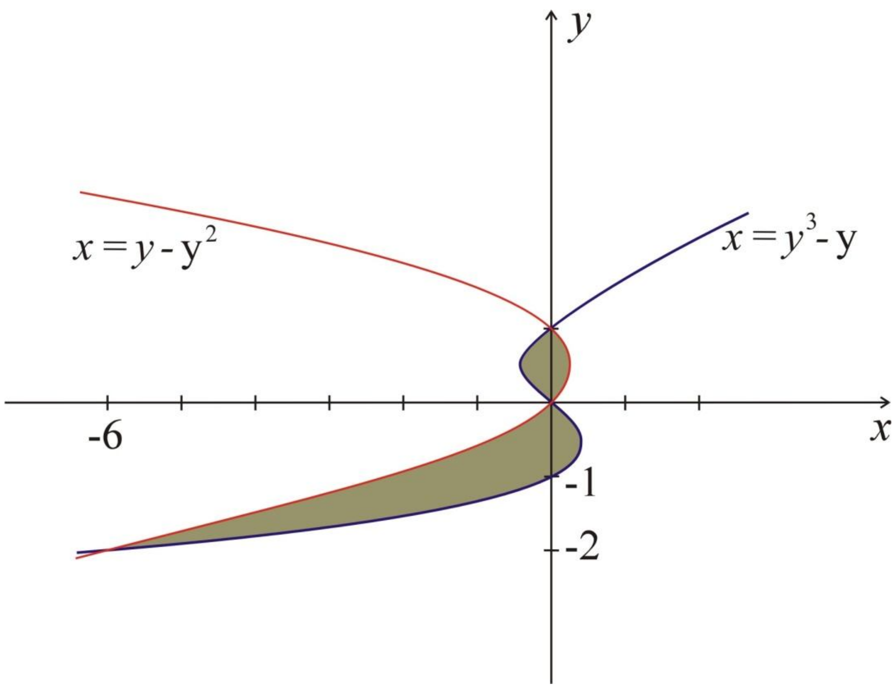


Figura 1

Solução

Seja $R = R_1 \cup R_2$, a região pedida, onde R_1 é a região situada abaixo do eixo x e R_2 é a região situada acima do eixo x

Então a área da região é $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$

Cálculo de $A(R_1)$

$$A(R_1) = \int_{-2}^{0} [(y^3 - y) - (y - y^2)]\,dy = \int_{-2}^{0} (y^3 + y^2 - 2y)\,dy$$

$$= \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} - 2\frac{y^2}{2}\Bigg]_{-2}^{0} = -\left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2\right] = -\left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] = \frac{8}{3}$$ unidades de área.

Cálculo de $A(R_2)$

$$A(R_1) = \int_0^1 [(y - y^2) - (y^3 - y)]\,dy = \int_0^1 (2y - y^2 - y^3)\,dy$$

$$= 2\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\Bigg]_0^1 = \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] = \left[\frac{12 - 4 - 3}{12}\right] = \frac{5}{12}$$ unidades de área.

Assim

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32 + 5}{12} = \frac{37}{12}$$ unidades de área.

2ª Questão (1,0 ponto) - Derive a seguinte função:

$$f(x) = \pi^{\left(x^{-2}\right)}.\left(x^{-2}\right)^{\pi}$$

Solução:

$$f'(x) = \pi^{\left(x^{-2}\right)}.\pi\left(x^{-2}\right)^{\pi-1}\left(x^{-2}\right)' + \pi^{\left(x^{-2}\right)}\left(x^{-2}\right)'(\ln\pi).\left(x^{-2}\right)^{\pi}$$

$$= \pi^{\left(x^{-2}\right)}.\pi\left(x^{-2}\right)^{\pi-1}\left(-2x^{-3}\right) + \pi^{\left(x^{-2}\right)}\left(-2x^{-3}\right)(\ln\pi)\left(x^{-2}\right)^{\pi}$$

$$= \pi^{\left(x^{-2}\right)}\left(x^{-2}\right)^{\pi}\left(-2x^{-3}\right)[\pi x^2 + \ln\pi]$$

O aluno pode obter a derivada usando derivação logarítmica.

3ª Questão (1,5 ponto) - Calcule o limite seguinte: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3^x - 1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Solução

Observe que o limite dado e uma forma indeterminada do tipo $(\infty)^0$

Por outro lado:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x-1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\left(\frac{1}{x}\ln(\frac{3^x-1}{2x})\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\ln(\frac{3^x-1}{2x})\right)} \qquad (1)$$

Note que $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{x}\ln(\frac{3^x-1}{2x})\right)$ é uma forma indeterminada do tipo $0.\infty$

Porém

$$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{3^x-1}{2x}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty}\frac{\ln\left(\frac{3^x-1}{2x}\right)}{x} = \lim_{x \to +\infty}\frac{\ln\left(3^x-1\right)-\ln(2x)}{x}$$

, esta última expressão é uma forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Portanto podemos aplicar a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln(3^x-1)-\ln(2x)}{x}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{3^x\ln 3}{3^x-1}\right)-\frac{2}{2x}}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x\ln 3}{3^x-1}\right) - \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)}_{0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x(\ln 3)^2}{3^x(\ln 3)}\right) = \ln 3 \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) obtemos,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3^x-1}{2x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln 3} = 3$$

4ª Questão (3,0 pontos) - Calcule:

a) $\int x\cos(x)\,dx$ **b)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(t)\sqrt{\operatorname{tg}(t)}\;\;dt$

Solução

a) $\int x\cos(x)\,dx = \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos(x)\,dx}_{\mathrm{dv}}$

Sejam $\begin{cases} u = x & \Rightarrow \quad du = dx \\ dv = \cos(x)\,dx & \Rightarrow \quad v = \operatorname{sen}(x) \end{cases}$

Então usando integração por partes, temos

$$\int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos(x)\,dx}_{\mathrm{dv}} = \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{v} - \int \underbrace{\operatorname{sen}(x)}_{v}\,\underbrace{dx}_{du} = x\operatorname{sen}(x) + \cos(x) + C$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(t)\sqrt{\operatorname{tg}(t)}\;\;dt$

Fazendo a substituição

$u = \mathrm{tg}(t) \quad \Rightarrow \quad du = \sec^2(t)\,dt$

E a mudança dos limites de integração

se $t = 0 \quad \Rightarrow u = 0$ se $t = \pi/4 \quad \Rightarrow u = \mathrm{tg}(\pi/4) = 1$

Obtemos $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(t)\sqrt{\mathrm{tg}(t)}\quad dt = \int_0^1 u^{1/2}du = \frac{u^{(1/2)+1}}{(1/2)+1} = 2\frac{u^{3/2}}{3}\Bigg]_0^1 = \frac{2}{3}$

5ª Questão (3,0 pontos) – Dada a função $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, determine:

a) (0,2 pontos) o domínio de f;
b) (0,5 pontos) as assíntotas horizontais e verticais (se existirem) para o gráfico de f;
c) (0,5 pontos) os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente;
d) (0,3 pontos) os pontos de máximos e/ou mínimos relativos e absolutos de f (se existirem);
e) (0,5 pontos) os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima;
f) (0,3 pontos) os pontos de inflexão (se existirem);
g) (0,5 pontos) um esboço do gráfico de f;
h) (0,2 pontos) a imagem de f.

Solução

a) (0,2 pontos). $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \ln x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 0 \ \text{ e } \ x \neq 1\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$

b) (0,5 pontos)

Candidatos a assíntotas verticais: $x = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty$. Portanto $x = 1$ é uma assíntota vertical. (Note que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty$)

Assíntotas horizontais:

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, podemos aplicar então a regra de L'Hôpital

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1/x} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$. Por outro lado note que sendo o domínio de f o conjunto $(0,1)\cup(1,+\infty)$ não faz sentido estudar $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)$. Portanto não existe assíntota horizontal.

c) (0,5 pontos) $f'(x) = \dfrac{\ln x - x(1/x)}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$. Note que $(\ln x)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Assim $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$. Portanto $x = e$ é um número crítico

Se $x < e$ e $x \neq 1 \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow (\ln x - 1) < 0 \quad \therefore \quad f'(x) < 0$, logo de aqui deduzimos que f é decrescente em $(0,1) \cup (1,e)$.

Se $x > e \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow (\ln x - 1) > 0 \therefore f'(x) > 0$, logo deduzimos que f é crescente no intervalo $(e, +\infty)$.

d) (0,3 pontos)Do item c) e o teste da derivada 1ª podemos afirmar que em $x = e$, existe um mínimo relativo e $f(e) = \dfrac{e}{\ln e} = \dfrac{e}{1} = e$. Assim (e, e) é um ponto de mínimo relativo. Podemos dizer também que não existe nem máximo absoluto nem mínimo absoluto já que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{\ln x} = -\infty$

e) (0,5 pontos)

$$f''(x) = \frac{(\ln x)^2\ (1/x) - (\ln x - 1)2(\ln x)(1/x)}{(\ln x)^4}$$

$$= \frac{(1/x)(\ln x)}{(\ln x)^4}[\ln x - (\ln x - 1)2]$$

$$= \frac{1}{x(\ln x)^3}[\ln x - 2\ln x + 2] = \frac{1}{x(\ln x)^3}[2 - \ln x]$$

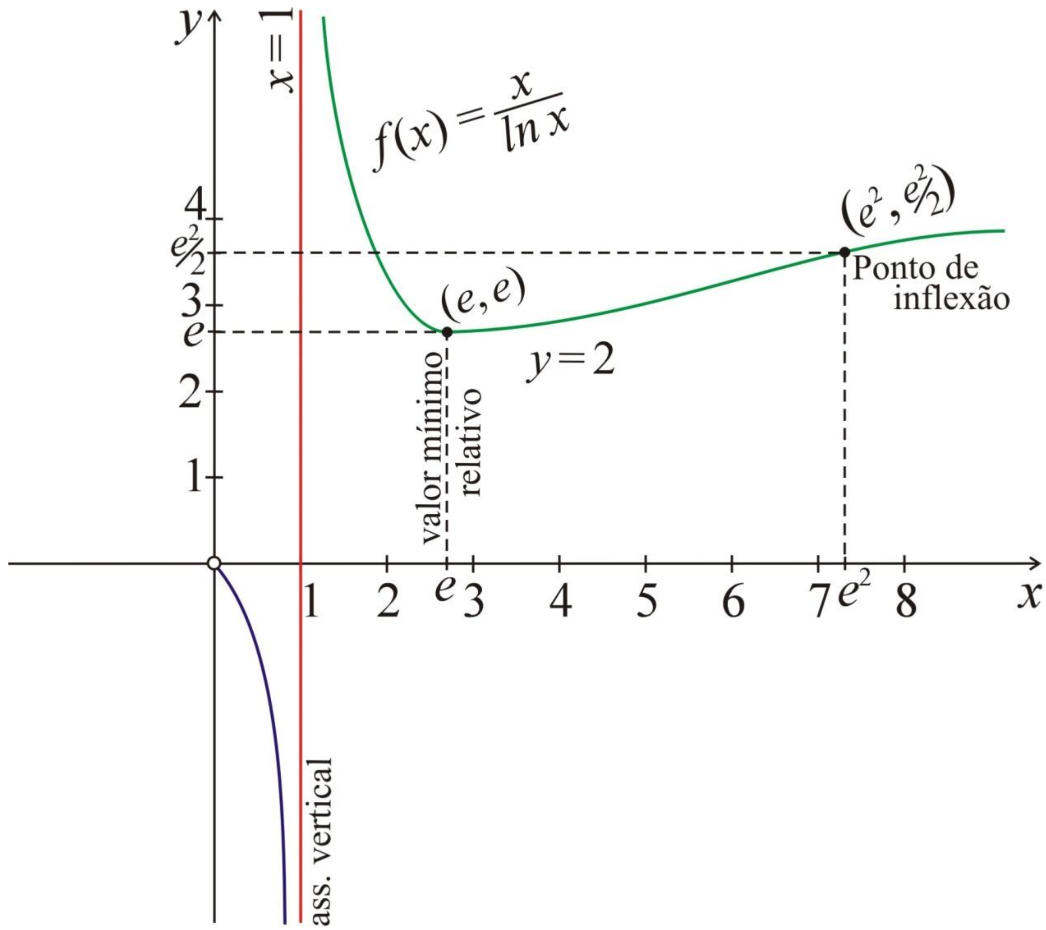
Logo, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow 2 = \ln x \Leftrightarrow x = e^2$

	0 1	e^2	
Sinal de x	+	+	+
Sinal de $(\ln x)^3$	–	+	+
Sinal de $2 - \ln x$	+	+	–
Sinal de f''	–	+	–
Gráfico de f	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Portanto, o gráfico de f é côncavo para cima no intervalo $(1, e^2)$ e o gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(0,1) \cup (e^2, +\infty)$.

f) (0,3 pontos) Existe mudança de concavidade no ponto $(e^2, f(e^2)) = (e^2, e^2/2)$ pois $f(e^2) = \dfrac{e^2}{\ln e^2} = \dfrac{e^2}{2}$, e existe reta tangente no ponto já que $f'(e^2)$ existe. Então $(e^2, e^2/2)$ é um ponto de inflexão.

g) (0,5 pontos) Esboço do gráfico de f.



h) (0,2 pontos) Do gráfico de f observamos que $\text{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (e, +\infty)$.