

Cálculo II – AD2 (2014/1) - Gabarito

Solução da Questão 1 a)

Em primeiro lugar, observamos que o integrando não é uma fração própria. Devemos portanto, inicialmente, efetuar a divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r|l} 3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1 & x^5 + 2x^3 + x \\ -3x^7 - 6x^5 - 3x^3 & 3x^2 \\ \hline \text{Resto} & 1 \end{array}$$

Assim $3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1 = 3x^2(x^5 + 2x^3 + x) + 1$ e portanto

$$\frac{3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{3x^2(x^5 + 2x^3 + x) + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = 3x^2 + \frac{1}{x^5 + 2x^3 + x}$$

O denominador da última fração pode ser fatorado como

$$x^5 + 2x^3 + x = x(x^4 + 2x^2 + 1) = x(x^2 + 1)^2,$$

logo

$$\frac{3x^7 + 6x^5 + 3x^3 + 1}{x^5 + 2x^3 + x} = 3x^2 + \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} \quad (\text{a})$$

Vamos decompor esta última fração em frações parciais:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2 + 1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{A(x^2 + 1)^2 + x(Bx + C)(x^2 + 1) + x(Dx + E)}{x(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{(A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + E)x + A}{x(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Igualando os numeradores, devemos ter

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ 2A+B+D=0 \\ C+E=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ E=0 \end{cases} \Rightarrow D=-1$$

Logo

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Substituindo em (a), fica:

$$\frac{3x^7+6x^5+3x^3+1}{x^5+2x^3+x} = 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

De volta a integral indefinida, temos portanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^7+6x^5+3x^3+1}{x^5+2x^3+x} dx &= \int 3x^2 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \\ &= x^3 + \ln|x| - \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1} dx}_{(1)} - \underbrace{\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx}_{(2)} \end{aligned} \quad (*)$$

Nas integrais (1) e (2), podemos usar simultaneamente a substituição simples

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2} \text{ e fica}$$

$$\begin{aligned} \underbrace{\int \frac{x}{x^2+1} dx}_{(1)} &= \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2} \ln|u| = \frac{1}{2} \ln|x^2+1|, \text{ e} \\ \underbrace{\int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx}_{(2)} &= \int \frac{du}{2u^2} = -\frac{1}{2u} = -\frac{1}{2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Substituindo em (*), tem-se

$$\int \frac{3x^7+6x^5+3x^3+1}{x^5+2x^3+x} dx = x^3 + \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

Solução da Questão 1 b)

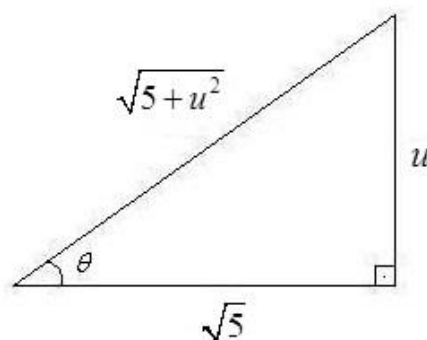
Iniciemos calculando a primitiva. Para isso, comecemos fazendo a substituição simples

$$u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t \, dt \quad (1)$$

Assim ficamos com

$$\int \frac{\sin t}{(5 + \cos^2 t)^{5/2}} dt = \int \frac{-du}{(5 + u^2)^{5/2}} \quad (2)$$

Note que o denominador possui uma expressão da forma $a^2 + u^2$, com $a = \sqrt{5}$, o que sugere aplicar uma mudança de variáveis via método de substituição trigonométrica usando a função tangente (ou cotangente), como mostra o triângulo associado da figura a seguir



$$\text{Assim } u = \sqrt{5} \cdot \tan \theta \Rightarrow du = \sqrt{5} \cdot \sec^2 \theta \, d\theta. \text{ E ainda: } \begin{cases} \sec \theta = \frac{\sqrt{5+u^2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow 5+u^2 = 5\sec^2 \theta \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+u^2}} \text{ e } \sin \theta = \frac{u}{\sqrt{5+u^2}} \end{cases} \quad (3)$$

Substituindo em (2), fica

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin t}{(5 + \cos^2 t)^{5/2}} dt &= \int \frac{-du}{(5 + u^2)^{5/2}} \stackrel{(3)}{=} \int \frac{-\sqrt{5} \sec^2 \theta \, d\theta}{(5 \sec^2 \theta)^{5/2}} = \int -\frac{\sec^{-3} \theta}{\sqrt{5^4}} d\theta = -\int \frac{\cos^3 \theta}{25} d\theta = \\ &= -\frac{1}{25} \int \cos^2 \theta \cos \theta \, d\theta = -\frac{1}{25} \int (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \, d\theta = -\frac{1}{25} \left[\sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} \right] + C. \end{aligned} \quad (4)$$

Precisamos agora voltar para a variável original.

$$\text{Por (1) e (3), obtemos } \sin \theta = \frac{\cos t}{\sqrt{5 + \cos^2 t}}.$$

Logo

$$\int \frac{\sin t}{(5 + \cos^2 t)^{5/2}} dt = -\frac{1}{25} \left[\frac{\cos t}{(5 + \cos^2 t)^{1/2}} - \frac{1}{3} \frac{\cos^3 t}{(5 + \cos^2 t)^{3/2}} \right] + C$$

Para o cálculo da integral definida dada no enunciado, basta agora aplicar o TFC:

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin t}{(5 + \cos^2 t)^{5/2}} dt &= -\frac{1}{25} \left[\frac{\cos t}{(5 + \cos^2 t)^{1/2}} - \frac{1}{3} \frac{\cos^3 t}{(5 + \cos^2 t)^{3/2}} \right]_{2\pi}^{3\pi} = \\ &= -\frac{1}{25} \cdot \left(\frac{-1}{6^{1/2}} - \frac{-1}{3 \cdot 6^{3/2}} \right) + \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{6^{1/2}} - \frac{1}{3 \cdot 6^{3/2}} \right) = \frac{17}{225\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Solução da Questão 2 a)

Por definição, para um valor de $s \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin 3t \, dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} \sin 3t \, dt \quad (*)$$

Pelo que foi visto no caderno didático, uma condição necessária para a convergência da integral é que a função $f(t) = e^{-st} \sin 3t$ satisfaça $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Se $s = 0$, então $f(t) = \sin 3t$ e neste caso não existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Se $s < 0$, então $-s > 0$. Daí $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} = +\infty$ e daí também não existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} \sin 3t$.

Em particular, se $s \leq 0$, a integral é divergente.

Resta o caso $s > 0$.

Calculemos, para um valor de $T > 0$ fixado, a integral definida em (*). inicialmente, obtenhamos a primitiva

$$\int e^{-st} \sin 3t \, dt.$$

Usando integração por partes, façamos

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \sin 3t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -se^{-st} dt \\ v = -\frac{\cos 3t}{3} \end{cases}$$

Assim

$$\underbrace{\int e^{-st} \sin 3t \, dt}_{(I)} = \underbrace{-e^{-st} \frac{\cos 3t}{3}}_{(I)} - \int se^{-st} \frac{\cos 3t}{3} dt = -e^{-st} \frac{\cos 3t}{3} - \underbrace{\frac{s}{3} \int e^{-st} \cos 3t \, dt}_{(II)} \quad (**)$$

Usando integração por partes novamente, agora em (II), façamos:

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \cos 3t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -se^{-st} \, dt \\ v = \frac{\sin 3t}{3} \end{cases}$$

a integral (II) fica $\int e^{-st} \cos 3t \, dt = \underbrace{e^{-st} \frac{\sin 3t}{3}}_{(I)} - \int -se^{-st} \frac{\sin 3t}{3} \, dt = e^{-st} \frac{\sin 3t}{3} + \frac{s}{3} \underbrace{\int e^{-st} \sin 3t \, dt}_{(I)}.$

Substituindo em (**), fica:

$$\begin{aligned} \underbrace{\int e^{-st} \sin 3t \, dt}_{(I)} &= -e^{-st} \frac{\cos 3t}{3} - \frac{s}{3} \left[e^{-st} \frac{\sin 3t}{3} + \frac{s}{3} \underbrace{\int e^{-st} \sin 3t \, dt}_{(I)} \right] \\ \Rightarrow \underbrace{\int e^{-st} \sin 3t \, dt}_{(I)} &= -e^{-st} \frac{\cos 3t}{3} - \frac{s}{9} e^{-st} \sin 3t - \frac{s^2}{9} \underbrace{\int e^{-st} \sin 3t \, dt}_{(I)} \end{aligned}$$

Isolando no lado esquerdo os termos comuns contendo a integral (I), fica:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(1 + \frac{s^2}{9}\right) \int e^{-st} \sin 3t \, dt}_{(I)} &= -e^{-st} \frac{\cos 3t}{3} - \frac{s}{9} e^{-st} \sin 3t = -\frac{e^{-st}}{9} [3 \cos 3t + s \sin 3t] \\ \Rightarrow \underbrace{\int e^{-st} \sin 3t \, dt}_{(I)} &= -\frac{e^{-st}}{s^2 + 9} [3 \cos 3t + s \sin 3t] \end{aligned}$$

Assim, usando o TFC, a integral definida em (*) fica

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^T e^{-st} \sin 3t \, dt}_{(I)} &= -\frac{e^{-st}}{s^2 + 9} [3 \cos 3t + s \sin 3t] \Bigg|_{t=0}^{t=T} = \\ &= -\frac{e^{-sT}}{s^2 + 9} [3 \cos 3T + s \sin 3T] + \frac{e^{-s0}}{s^2 + 9} [3 \cos (3.0) + s \sin (3.0)] = -\frac{e^{-sT}}{s^2 + 9} [3 \cos 3T + s \sin 3T] + \frac{3}{s^2 + 9} \end{aligned}$$

Enfim, substituindo em (*), fica

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin 3t \, dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{s^2 + 9} \left[3 - e^{-sT} (3 \cos 3T + s \sin 3T) \right] = \frac{3}{s^2 + 9} + \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{s^2 + 9} e^{-sT} (3 \cos 3T + s \sin 3T) \right]$$

Como estamos considerando o caso $s > 0$, temos que $\lim_{T \rightarrow +\infty} (-sT) = -\infty \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} = 0$.

Como a função $y(t) = 3 \cos 3t + s \sin 3t$ é limitada (mais precisamente $|y(t)| \leq 3 + s$, para todo $t \in \mathbb{R}$),

segue que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \left[e^{-sT} (3 \cos 3T + s \sin 3T) \right] = 0$ e portanto $\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin 3t \, dt = \frac{3}{s^2 + 9}$.

Lembremos que queremos obter os valores $s \in \mathbb{R}$ para os quais se tem $\int_0^{+\infty} e^{-st} \sin 3t \, dt = \frac{3}{34}$, ou seja,

$$\frac{3}{s^2 + 9} = \frac{3}{25} \Rightarrow s^2 = 25 \Rightarrow s = -5 \text{ ou } s = 5$$

Como neste caso $s > 0$, então $s = 5$.

Solução da Questão 2 b)

$$\int_0^{+\infty} \frac{8}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8} \, dx$$

Observe que a integral dada é imprópria do primeiro tipo, pois intervalo de integração $[0, +\infty)$ é infinito.

Note-se que o integrando $\frac{8}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$ pode ser escrito como

$$\frac{8}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8} = \frac{8}{x^2(x+2) + 4(x+2)} = \frac{8}{(x+2)(x^2+4)}$$

e está definido no intervalo dado. Pela definição de integral imprópria, onde o limite de integração superior é infinito, temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{8}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8} \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{8}{(x+2)(x^2+4)} \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{8}{(x+2)(x^2+4)} \, dx \quad (*)$$

Calculemos separadamente a integral indefinida $\int \frac{8}{(x+2)(x^2+4)} \, dx$

Decompondo o integrando em frações parciais, fica:

$$\frac{8}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}, \text{ e então}$$

$$Ax^2 + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=0 \\ 4A+2C=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

Assim:

$$\int \frac{8}{(x+2)(x^2+4)} dx = \int \frac{1}{x+2} dx - \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx = \ln \frac{|x+2|}{\sqrt{x^2+4}} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

Logo, substituindo em (*);

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{8}{x^3+2x^2+4x+8} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{|x+2|}{\sqrt{x^2+4}} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{|t+2|}{\sqrt{t^2+4}} + \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right] - \underbrace{\left[\ln \frac{|0+2|}{\sqrt{0^2+4}} + \operatorname{arctg} \frac{0}{2} \right]}_{=0} = \frac{\pi}{2}, \text{ pois} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|t+2|}{\sqrt{t^2+4}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{2}{t}}{\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}} = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \left[\frac{|t+2|}{\sqrt{t^2+4}} \right] = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Logo } \int_0^{+\infty} \frac{8}{x^3+2x^2+4x+8} dx = \frac{\pi}{2}, \text{ portanto é convergente.}$$

Solução da Questão 3 a)

A região considerada é mostrada na figura 3.1 a seguir

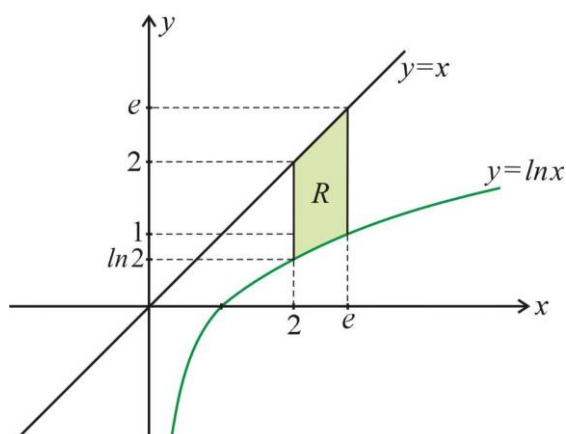


Figura 3.1

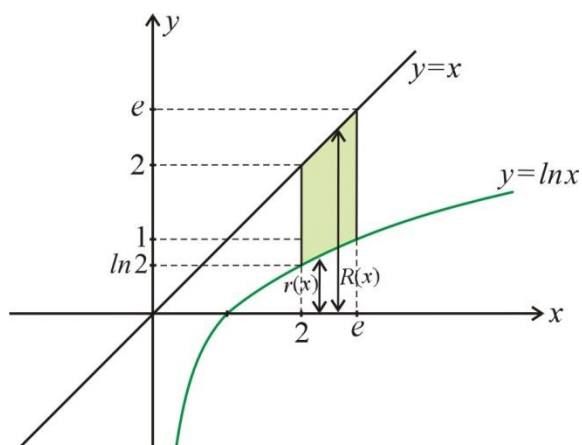


Figura 3.2

Note que o eixo de rotação é o eixo x e **como a integração tem que ser feita em relação a x** , o método dos discos ou arruelas é o indicado. Na figura 3.2 são mostrados os raios da arruela típica correspondente ao problema. O sólido é mostrado na figura 3.3

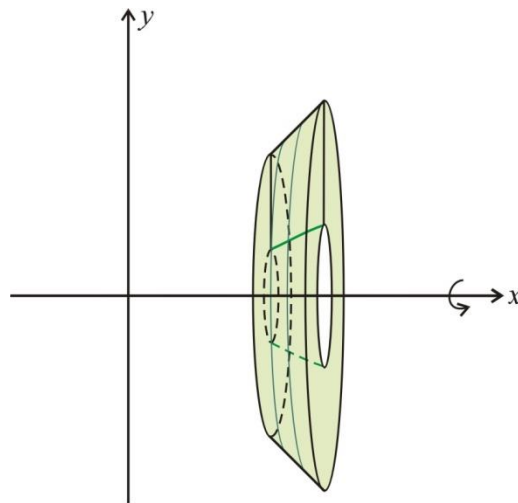


Figura 3.3

Observemos que $R(x) = x$ e $r(x) = \ln x$, em que $2 \leq x \leq e$.

Assim, denotando o volume por V , temos que:

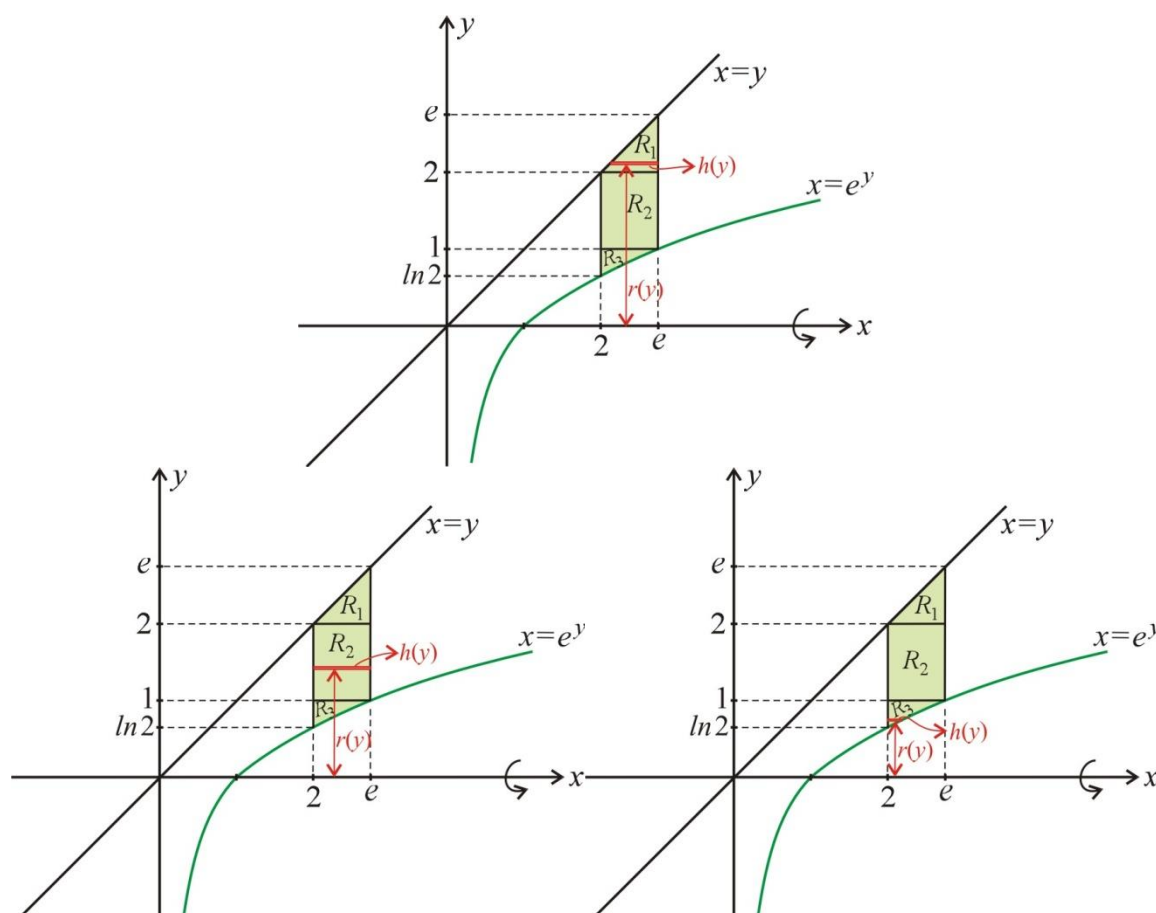
$$V = \pi \int_2^e \left[(R(x))^2 - (r(x))^2 \right] dx = \pi \int_2^e \left[x^2 - (\ln x)^2 \right] dx$$

Solução da Questão 3 b)

O sólido é o mesmo exibido na figura 3.3 anterior

Para calcular o volume deste sólido **por integração em relação a y** , observe que o método das cascas cilíndricas é o indicado.

Vamos dividir a região dada em três regiões R_1 , R_2 e R_3 , como mostram as figuras em 3.4 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo x .



Figuras 3.4

Neste caso, na região R_1 para $2 \leq y \leq e$ resulta $r(y) = y$ e $h(y) = e - y$, logo denotando por V_1 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_1 = 2\pi \int_2^e r(y).h(y)dy = 2\pi \int_2^e y(e - y)dy$$

Na região R_2 para $1 \leq y \leq 2$ resulta $r(y) = y$ e $h(y) = e - 2$, logo denotando por V_2 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_2 = 2\pi \int_1^2 r(y).h(y)dy = 2\pi \int_1^2 y(e - 2)dy$$

Similarmente, na região R_3 , para $\ln 2 \leq y \leq 1$ resulta $r(y) = y$ e $h(y) = e^y - 2$, logo denotando por V_3 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_3 = 2\pi \int_{\ln 2}^1 r(y).h(y)dy = 2\pi \int_{\ln 2}^1 y(e^y - 2)dy$$

Assim neste caso

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 2\pi \int_2^e y(e - y)dy + 2\pi \int_1^2 y(e - 2)dy + 2\pi \int_{\ln 2}^1 y(e^y - 2)dy$$

Solução da Questão 3 c)

Note que o eixo de rotação é o eixo y e **como a integração tem que ser feita em relação a x** , o método das cascas cilíndricas é o conveniente.

A figura 3.5 mostra a casca típica associada ao problema, em que $h(x) = x - \ln x$ e $r(x) = x$, com $2 \leq x \leq e$.

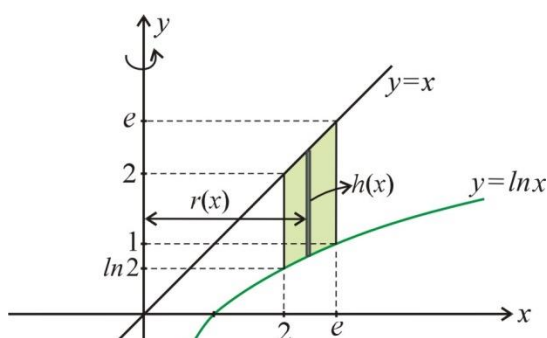


Figura 3.5

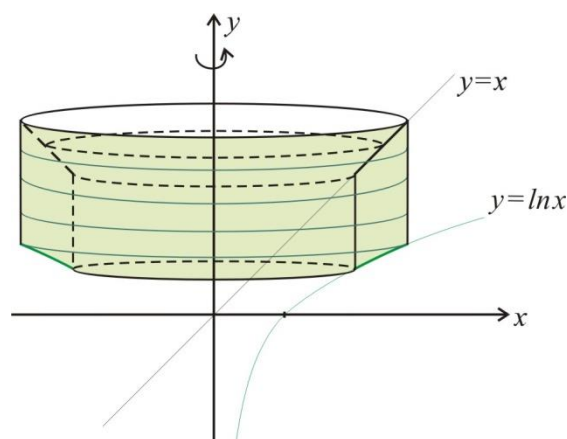


Figura 3.6

Assim, o volume V do sólido é dado por

$$V = 2\pi \int_2^e r(x) \cdot h(x) dx = 2\pi \int_2^e x(x - \ln x) dx.$$

O sólido é mostrado na figura 3.6.

Solução da Questão 3 d)

Note que o eixo de rotação é o eixo y e **como a integração tem que ser feita em relação a y** , o método dos discos ou arruelas é o indicado.

Como no item b), vamos dividir a região dada em três regiões R_1 , R_2 e R_3 , como mostra a figura em 3.7 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo y .

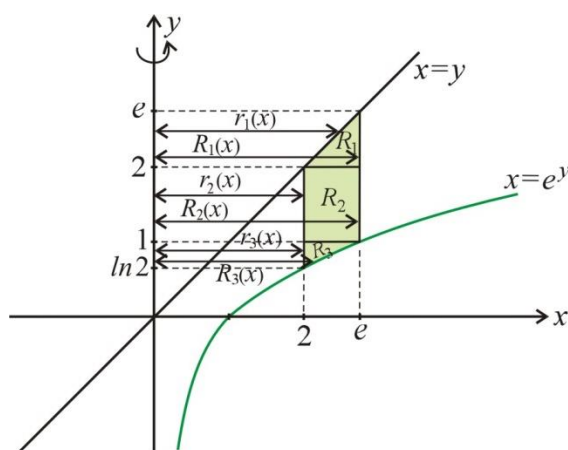


Figura 3.7

O sólido é o mesmo mostrado na figura 3.6

Neste caso, na região R_1 , para $2 \leq y \leq e$, resulta $R(y) = e$ e $r(y) = y$, logo denotando por V_1 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_1 = \pi \int_2^e \left[[R(y)]^2 - [r(y)]^2 \right] dy = \pi \int_2^e (e^2 - y^2) dy$$

Na região R_2 para $1 \leq y \leq 2$ resulta $R(y) = e$ e $r(y) = 2$, logo denotando por V_2 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_2 = \pi \int_1^2 \left[[R(y)]^2 - [r(y)]^2 \right] dy = \pi \int_1^2 (e^2 - 2^2) dy = \pi \int_1^2 (e^2 - 4) dy$$

Analogamente na região R_3 para $\ln 2 \leq y \leq 1$ resulta $R(y) = e^y$ e $r(y) = 2$, logo denotando por V_3 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_3 = \pi \int_{\ln 2}^1 \left[[R(y)]^2 - [r(y)]^2 \right] dy = \pi \int_{\ln 2}^1 \left[(e^y)^2 - 2^2 \right] dy = \pi \int_{\ln 2}^1 [e^{2y} - 4] dy$$

Assim neste caso

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \pi \int_2^e (e^2 - y^2) dy + \pi \int_1^2 (e^2 - 4) dy + \pi \int_{\ln 2}^1 [e^{2y} - 4] dy.$$

Solução da Questão 3 e)

Note que o eixo de rotação é a reta horizontal $y = e$. Neste caso, o método dos discos ou arruelas é o indicado. Os raios da arruela típica são mostrados na figura 3.8 e o sólido na figura 3.9.

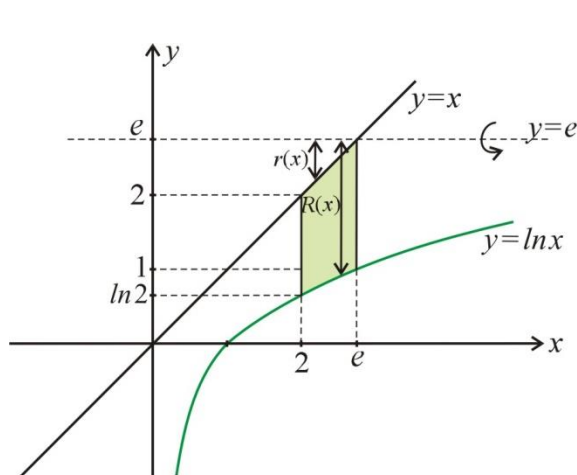


Figura 3.8

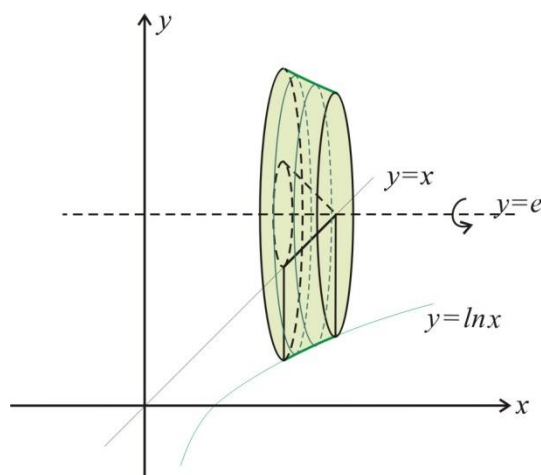


Figura 3.9

Aqui $R(x) = e - \ln x$ e $r(x) = e - x$, com $2 \leq x \leq e$. Assim $(R(x))^2 = (e - \ln x)^2$ e $(r(x))^2 = (e - x)^2$.

Portanto, o volume do sólido é dado por

$$V = \pi \int_2^e \left[R(x)^2 - r(x)^2 \right] dx = \pi \int_2^e \left[(e - \ln x)^2 - (e - x)^2 \right] dx.$$

Solução da Questão 3 f)

Note que o eixo de rotação é a reta vertical $x = 2$. Neste caso, o método das cascas cilíndricas se aplica bem. A casca típica é mostrada na figura 3.10 abaixo.

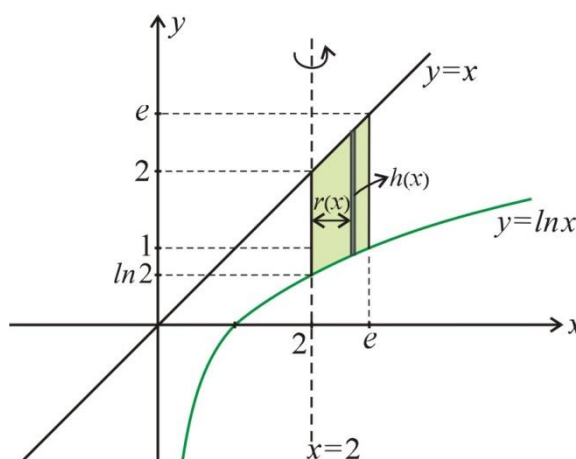


Figura 3.10

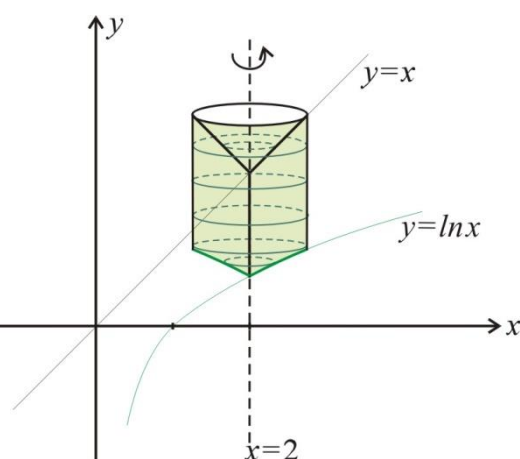


Figura 3.11

Tem-se $h(x) = x - \ln x$ e $r(x) = x - 2$, com $2 \leq x \leq e$. O volume V do sólido é portanto dado por

$$V = 2\pi \int_2^e r(x)h(x)dx = 2\pi \int_2^e (x-2)(x-\ln x)dx.$$

O sólido é exibido na figura 3.11.

Solução da Questão 4)

De acordo com a aula 29 do caderno didático, se uma curva é dada por $x = x(y)$, com $a \leq y \leq b$, então seu comprimento é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy.$$

Temos

$$x(y) = \frac{y^4}{8} + \frac{1}{4y^2} \Rightarrow x'(y) = \frac{y^3}{2} - \frac{1}{2y^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + (x'(y))^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}(y^3 - y^{-3})\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}(y^6 - 2 + y^{-6}) = \frac{4y^6 + y^{12} - 2y^6 + 1}{4y^6} = \frac{y^{12} + 2y^6 + 1}{4y^6} = \frac{(y^6 + 1)^2}{4y^6}$$

$$\sqrt{1 + (x'(y))^2} = \sqrt{\frac{(y^6 + 1)^2}{4y^6}} = \frac{y^6 + 1}{2y^3}$$

Assim

$$L = \int_1^2 \frac{y^6 + 1}{2y^3} dy = \int_1^2 \left(\frac{y^3}{2} + \frac{y^{-3}}{2} \right) dy = \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^{-2}}{4} \right]_1^2 = \left(\frac{2^4}{8} - \frac{2^{-2}}{4} \right) - \left(\frac{1^4}{8} - \frac{1^{-2}}{4} \right) = \frac{33}{16}$$

Logo $L = \frac{33}{16}$ unidades de comprimento.