AP1- CÁLCULO II-2010/1 GABARITO

1ª Questão (2,0 pontos) O gráfico de $f(x)=x^3-x$ é mostrado na Figura 1

(a) Calcule $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

(b) Encontre a área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo x para $x\in[-2,2]$.

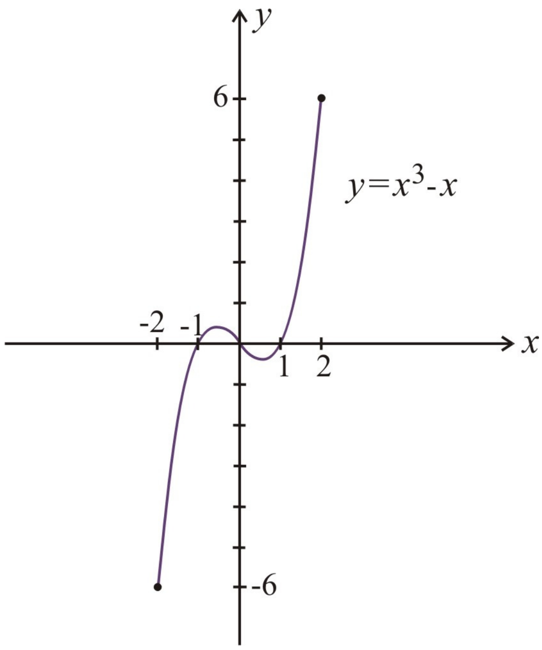


Figura 1

Solução

(a) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{2} (x^3-x)dx=(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2})\Big]_{-2}^{2}=(\frac{2^4}{4}-\frac{2^2}{2})-(\frac{(-2)^4}{4}-\frac{(-2)^2}{2})=4-2-4+2=0$

A integral definida $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ neste caso pode ser interpretada como a diferença de duas áreas, isto é:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=A_1-A_2$$

Onde, A_1 é a área total das regiões acima do eixo x, ou seja as regiões limitadas pelo gráfico de f, e o eixo x para $x\in[-1,0]\cup[1,2]$. Na figura 2 as regiões acima do eixo x são as regiões R_2 e R_4.

A_2 é a área total das regiões abaixo do eixo x ,ou seja as regiões limitadas pelo gráfico de f e o eixo x para $x \in [-2,-1] \cup [0,1]$. Na figura 2 as regiões abaixo do eixo x são as regiões R_1 e R_3 .
Como o valor da integral definida é zero 0, isso indica que a área total das regiões acima do eixo x é igual a área das regiões abaixo do eixo x .

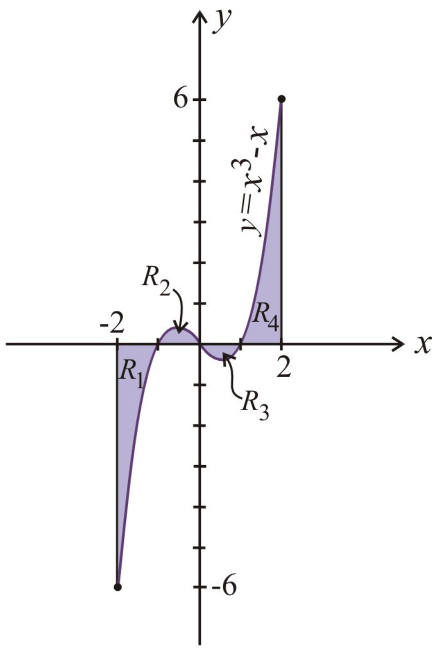


Figura 2

(b) Na figura 2 podemos observar que este caso a região pedida é a união das regiões R_1, R_2 R_3 e R_4 Assim $A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4)$. Podemos calcular cada área separadamente ou por outro lado podemos observar que a função $f(x) = x^3 - x$ é impar, assim existe simetria do gráfico de f em relação à origem. Logo $A(R_4) = A(R_1)$ e $A(R_3) = A(R_2)$. Então

$$A(R) = 2A(R_3) + 2A(R_4) = -2\int_0^1 (x^3 - x)dx + 2\int_1^2 (x^3 - x)dx$$

$$= -2\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 + 2\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^2}{2}\Big]_1^2$$

$$= -\frac{x^4}{2} + x^2\Big]_0^1 + \frac{x^4}{2} - x^2\Big]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + 8 - 4 - \frac{1}{2} + 1 = 5 \text{ unidades de área}$$

2ª Questão (2,0 pontos)

a) Use as propriedades da função logarítmica e sua derivada para determinar $f'(x)$,

onde $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^{(4^x)}}{x^4+4^{x^2}}\right)$ para $x\in(0,+\infty)$.

b) Calcule o limite seguinte: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_2^{2+2h}\sqrt{1+t^3}\,dt$.

Solução

a) Para $x\in(0,+\infty)$, usando as propriedades da função logarítmica obtemos

$$f(x)=\ln\left(\frac{x^{(4^x)}}{x^4+4^{x^2}}\right)=\ln(x^{(4^x)})-\ln(x^4+4^{x^2})=(4^x)\ln(x)-\ln(x^4+4^{x^2})$$

Logo

$$f'(x)=(4^x)(\ln(x))'+(\ln x)(4^x)'-(\ln(x^4+4^{x^2}))'$$

Ou seja

$$f'(x)=(4^x)(\frac{1}{x})+(\ln x)(4^x\ln 4)-\frac{(x^4+4^{x^2})'}{(x^4+4^{x^2})}$$

Isto é

$$f'(x)=(\frac{4^x}{x})+4^x(\ln 4)(\ln x)-\frac{(4x^3+4^{x^2}(2x)\ln 4)}{(x^4+4^{x^2})}$$

Ou ainda

$$f'(x)=4^x\left(\frac{1}{x}+(\ln 4)(\ln x)\right)-2x\left(\frac{2x^2+4^{x^2}\ln 4}{x^4+4^{x^2}}\right)$$

b) Observe que $\lim\limits_{h\to 0}\displaystyle\int_2^{2+2h}\sqrt{1+t^3}\,dt=\int_2^{2}\sqrt{1+t^3}\,dt=0$, logo

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_2^{2+2h}\sqrt{1+t^3}\,dt=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\int_2^{2+2h}\sqrt{1+t^3}\,dt}{h}\to\dfrac{0}{0}$. Podemos aplicar a Regra de L´Hôpital, logo

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_2^{2+2h}\sqrt{1+t^3}\,dt}{h}\overset{L'H}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{d}{dh}\int_2^{2+2h}\sqrt{1+t^3}\,dt}{1}$$

Aplicando a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia no numerador da expressão anterior temos

$$=\lim_{h\to 0}(\sqrt{1+(2+2h)^3})(2+2h)'$$

$$=\lim_{h\to 0}2\sqrt{1+(2+2h)^3}=2\sqrt{1+(2)^3}=6$$

3ª Questão (3,0 pontos) - Calcule:

a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x^3}{x}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx$

Solução

a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x^3}{x}\,dx$

Observamos que a integral é definida no intervalo $[1,e]$, portanto é claro que $x>0$ assim o integrando esta bem definido. Usando propriedades da função logarítmica temos que $\ln x^3 = 3\ln x$

$$\int_1^e \frac{\ln x^3}{x}\,dx = \int_1^e 3\frac{\ln x}{x}\,dx = 3\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = 3\int_1^e (\ln x)\frac{1}{x}\,dx$$

Fazendo a substituição $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$ e a mudança dos limites de integração se $x=1 \Rightarrow u=\ln 1 = 0$ e se $x=e \Rightarrow u=\ln e=1$, resulta

$$\int_1^e \frac{\ln x^3}{x}\,dx = 3\int_0^1 u\,du = 3\frac{u^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{3}{2}.$$

b) $\displaystyle\int x^3 \ln x\,dx = \int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{x^3dx}_{dv}$

Sejam $\begin{cases} u=\ln x & \Rightarrow \quad du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^3\,dx & \Rightarrow \quad v=\dfrac{1}{4}x^4 \end{cases}$

Então usando a fórmula de integração por partes, temos

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{x^3dx}_{dv} = \underbrace{(\ln x)}_{u}\underbrace{\frac{x^4}{4}}_{v} - \int \underbrace{(\frac{x^4}{4})}_{v}\underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

4ª Questão (3,0 pontos) – Dada a função $f(x)=(1-x)e^x$, determine:

a) (0,2 pontos) o domínio de f ;

b) (0,5 pontos) as assíntotas horizontais e verticais (se existirem) para o gráfico de f ;
c) (0,5 pontos) os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente;
d) (0,3 pontos) os pontos de máximos e/ou mínimos relativos e absolutos de f (se existirem);
e) (0,5 pontos) os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima;
f) (0,3 pontos) os pontos de inflexão (se existirem);
g) (0,5 pontos) um esboço do gráfico de f ;
h) (0,2 pontos) a imagem de f .

Solução

a) (0,2 pontos). $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$

b) (0,5 pontos)
Note que f é uma função continua pois é o produto de funções contínuas definidas em todo $\mathbb{R}$ assim $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ para todo $a\in\mathbb{R}$, logo não existem assíntotas verticais .
Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty}(1-x)e^x=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}(1-x)e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{e^{-x}}\to\frac{+\infty}{+\infty},$$

Usando a regra de L´Hôpital resulta que $\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}=0$

Logo $y=0$ é a única assíntota horizontal.

c) (0,5 pontos) $f'(x)=(1-x)e^x+e^x(-1)=-xe^x$.

Como e^x é sempre maior que zero, temos que $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. Portanto $x=0$ é um número crítico.

Se $x<0 \Rightarrow f'(x)>0$, logo de aqui deduzimos que f é crescente em $(-\infty,0)$.

Se $x>0 \Rightarrow f'(x)<0$, logo deduzimos que f é decrescente no intervalo $(0,+\infty)$.

d) (0,3 pontos) Do item (c) e o teste da derivada 1ª podemos afirmar que em $x=0$, existe um máximo relativo e $f(0)=(1-0)e^0=1$. Assim $(0,1)$ é um ponto de máximo relativo. Como $x=0$ é o único ponto crítico no intervalo $(-\infty,+\infty)$, podemos dizer também que existe um máximo absoluto nesse ponto. Logo $(0,1)$ é um ponto de máximo absoluto. É claro que não existe mínimo absoluto desde que de (b) sabemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

e) (0,5 pontos)

$f'(x)=-xe^x$. Logo $f''(x)=-e^x-xe^x=-(1+x)e^x$

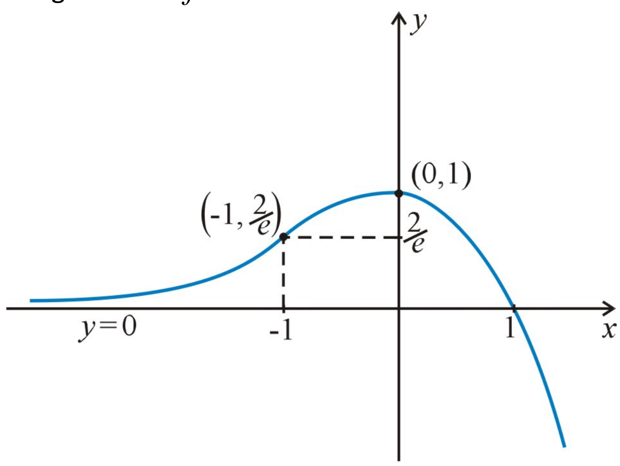
Assim, $f''(x)=0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$

Intervalos:	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < +\infty$
Sinal de e^x	+	+
Sinal de $(1+x)$	$-$	+
Sinal de f''	+	$-$
Gráfico de f	$\cup$	$\cap$

Portanto, o gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(-1,+\infty)$ e o gráfico de f é côncavo para cima no intervalo $(-\infty,-1)$.

f) (0,3 pontos) Existe mudança de concavidade no ponto $(-1, f(-1))$ observe que $f(-1) = 2e^{-1} = \dfrac{2}{e}$ e existe reta tangente nesse ponto já que $f'(-1)$ existe. Então $(-1, \dfrac{2}{e})$ é ponto de inflexão.

g) (0,5 pontos) Esboço do gráfico de f



h) (0,2 pontos) Do gráfico de f observamos que $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1]$.