

AP1 - CÁLCULO II - 2014/1 Gabarito

1ª Questão (3,5 pontos) Seja $\mathcal{R}$ a região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 1 - x^2$.

a) Esboce a região $\mathcal{R}$

Solução

Note que a interseção dos gráficos $y = x^2$ e $y = 1 - x^2$ ocorre nos pontos $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, pois $x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$. A região pedida é mostrada na

Figura 1:

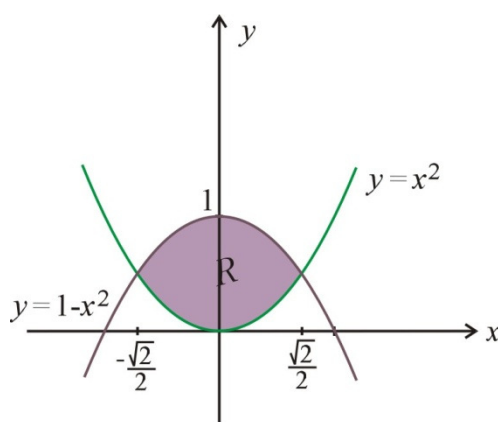


Figura 1

b) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais em relação à variável x .

Solução

Para representar a área de $\mathcal{R}$ em relação à variável x , note que a região $\mathcal{R}$ pode ser expressa como o seguinte conjunto: $\{(x, y) / -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, x^2 \leq y \leq 1 - x^2\}$. Na Figura 2 mostramos um retângulo representativo vertical na região.

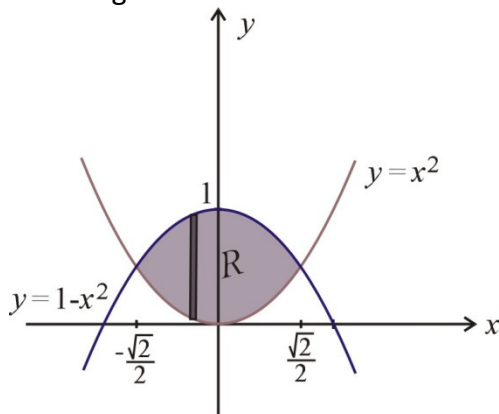


Figura 2

Logo,

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - x^2 - x^2) dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2) dx$$

Usando a simetria da região em relação ao eixo Oy podemos afirmar ainda que

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2) dx$$

c) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais em relação à variável y .

Para representar a área de $\mathcal{R}$ em relação à variável y , a região $\mathcal{R}$ precisa também ser dividida em duas regiões, na Figura 3 mostramos um retângulo representativo horizontal em cada região.

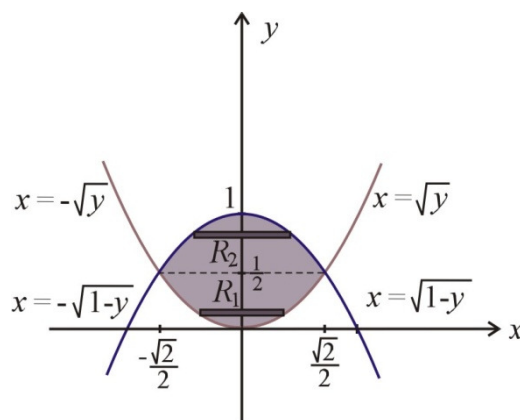


Figura 3

Lembre que, as interseções dos gráficos dados ocorrem quando a ordenada $y = \frac{1}{2}$. Neste caso, a representação da área é feita por duas integrais em relação à variável y :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{R}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{y} - (-\sqrt{y})) dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 (\sqrt{1-y} - (-\sqrt{1-y})) dy \\ \mathcal{A}(\mathcal{R}) &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{y} dy + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1-y} dy \end{aligned}$$

d) Calcule a área da região $\mathcal{R}$, usando a representação mais conveniente para você.

Se você decidiu calcular a área de $\mathcal{R}$ em relação à variável x temos:

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2) dx = 2 \left(x - 2 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right) = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

unidades de área. Resultado análogo você obterá se calcular a área em relação à variável y .

2ª Questão (1,0 pontos) Ache $\frac{dy}{dx}$ sabendo que $y = \int_{x^3}^{x-x^2} \sqrt{t^3+1} dt$ está definido para todo $x \in [-1, +\infty)$.

Solução

(a) Note que o integrando $\sqrt{t^3+1}$ é uma função contínua para todo número real para $t \geq -1$

$$y = \int_{x^3}^{x-x^2} \sqrt{t^3+1} dt = \int_{x^3}^a \sqrt{t^3+1} dt + \int_a^{x-x^2} \sqrt{t^3+1} dt, \quad a \in (-1, +\infty). \text{ Logo}$$

$$y = - \int_a^{x^3} \sqrt{t^3+1} dt + \int_a^{x-x^2} \sqrt{t^3+1} dt$$

Assim utilizando a 1ª forma do TFC e a regra da cadeia em cada somando obtemos

$$\frac{dy}{dx} = - \left(\sqrt{(x^3)^3+1} \right) [x^3]' + \left(\sqrt{(x-x^2)^3+1} \right) [x-x^2]'$$

Logo, da 1ª forma do TFC, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = - \left(\sqrt{(x^3)^3+1} \right) 3x^2 + \left(\sqrt{(x-x^2)^3+1} \right) (1-2x) \text{ ou}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \left(\sqrt{x^9+1} \right) 3x^2 + \left(\sqrt{(x-x^2)^3+1} \right) (1-2x)$$

3ª Questão (2,0 pontos) Calcule as seguintes integrais imediatas

a) (1,0) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}} dt$ b) (1,0) $\int \frac{4}{\sqrt{e^x}} dx$

Solução

a) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}} dt = 6 \arcsen t \Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = 6 \left(\arcsen \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \arcsen \left(\frac{1}{2} \right) \right) = 6 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \pi.$

b) $\int \frac{4}{\sqrt{e^x}} dx = \int \frac{4}{e^{\frac{x}{2}}} dx = 4 \int e^{-\frac{x}{2}} dx = 4(-2) \int e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) dx = -8e^{-\frac{x}{2}} + C$

4ª Questão (3,5 pontos)

(a) (1,0) Usando a técnica de substituição, calcule $\int \frac{5^{\ln x^2}}{x} dx$, onde $x > 0$.

Solução

Para $x > 0$ Faça a substituição

$$u = \ln x^2 \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2} dx = \frac{2}{x} dx \quad \text{ou} \quad u = \ln x^2 = 2 \ln x \Rightarrow du = \frac{2}{x} dx \quad \text{Em qualquer caso}$$

$$\frac{1}{2} du = \frac{1}{x} dx.$$

$$\int \frac{5^{\ln x^2}}{x} dx = \frac{1}{2} \int 5^u du = \frac{5^u}{2 \ln 5} + C = \frac{5^{\ln x^2}}{2 \ln 5} + C.$$

(b) (1,0) Usando a técnica de integração por partes, encontre $\int x \ln(3x) dx$, onde $x > 0$.

Solução

$$\text{Faça } u = \ln(3x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

Assim,

$$\int x \ln(3x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(3x) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(3x) - \frac{x^2}{4} + C.$$

(c) (1,5) Usando a técnica de potências e produtos de funções trigonométricas, ache

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cotg^2(x) \operatorname{cosec}^4(x) dx.$$

Solução

Vamos encontrar a solução da integral indefinida

$$\int \cotg^2(x) \operatorname{cosec}^4(x) dx = \int \cotg^2(x) \operatorname{cosec}^2(x) \operatorname{cosec}^2(x) dx$$

$$= \int \cotg^2(x) (1 + \cotg^2(x)) \operatorname{cosec}^2(x) dx \quad (*)$$

$$\text{Faça } u = \cotg(x) \Rightarrow du = -\operatorname{cosec}^2(x) dx \quad (**)$$

Substituindo (**) em (*) temos

$$\begin{aligned} &= \int u^2 (1 + u^2) (-1) du = - \int (u^2 + u^4) du \\ &= - \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right) + C = - \left(\frac{\cotg^3(x)}{3} + \frac{\cotg^5(x)}{5} \right) + C. \end{aligned}$$

Agora vamos calcular a integral definida pedida

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cotg^2(x) \operatorname{cosec}^4(x) dx = - \left(\frac{\cotg^3(x)}{3} + \frac{\cotg^5(x)}{5} \right) \Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{9\sqrt{3}}{5} \right) = \frac{14}{5} \sqrt{3}$$

Lembre-se que $\cotg(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $\cotg(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$.