

## AP2- CÁLCULO II-2009/2GABARITO

**1ª Questão (4,5 pontos).** Calcule as seguintes integrais:

**a) (1,5 ponto)**  $\int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx$

**b) (1,5 ponto)**  $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

**c) (1,5 ponto)**  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx$

### Solução

**a) (1,5 ponto)**

$$\frac{x^2}{(x+1)^3} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}, \text{ logo } x^2 = A(x+1)^2 + B(x+1) + C \quad (*)$$

Se em (\*) fazemos

$$x = -1 \Rightarrow 1 = C$$

$$x = 0 \Rightarrow 0 = A + B + 1 \Rightarrow A + B = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 4A + 2B + 1 \Rightarrow 4A + 2B = 0$$

Resolvendo o sistema resulta  $A = 1$  e  $B = -2$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x+1)^3} dx &= \int \frac{dx}{(x+1)} + \int \frac{-2 dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{(x+1)^3} \\ &= \ln |x+1| - 2 \int (x+1)^{-2} dx + \int (x+1)^{-3} dx \\ &= \ln |x+1| - 2 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + C \\ &= \ln |x+1| + \frac{2}{(x+1)} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C \end{aligned}$$

**b) (1,5 ponto)**

Vamos fazer a substituição trigonométrica na integral indefinida  $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$  e, então, calcular a integral definida usando os limites de integração em  $x$ .

Primeiro note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que  $\sqrt{9+x^2}$  é da forma  $\sqrt{a^2+x^2}$  com  $a = 3$ .

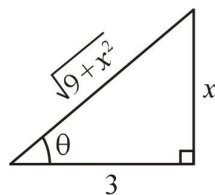


Figura 1

Fazendo a substituição trigonométrica  $\begin{cases} x = 3 \operatorname{tg} \theta \\ dx = 3 \sec^2 \theta d\theta \end{cases}$ , temos do triângulo associado da

Figura 1 que  $\sqrt{9+x^2} = 3 \sec \theta$ .

Obtemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \int \frac{3 \sec^2 \theta d\theta}{3 \sec \theta} = \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{9+x^2}}{3} + \frac{x}{3} \right| + C$$

Logo

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{9+3^2}}{3} + \frac{3}{3} \right| - \ln \left| \frac{\sqrt{9+0^2}}{3} + \frac{0}{3} \right| = \ln \left| \frac{3\sqrt{2}}{3} + 1 \right| - \ln 1 = \ln(\sqrt{2} + 1)$$

**c) (1,5 ponto)**

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx$$

Vamos calcular a integral indefinida  $\int \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} \Rightarrow 1 = A(x+3) + B(x+2) \quad (*)$$

Se em (\*) fazemos

$$x = -2 \Rightarrow 1 = A$$

$$x = -3 \Rightarrow 1 = B(-1) \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx = \int \frac{1}{x+2} dx - \int \frac{1}{x+3} dx = \ln |x+2| - \ln |x+3| + C = \ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C$$

Logo

$$\int_0^t \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx = \ln \left| \frac{t+2}{t+3} \right| - \ln \left( \frac{2}{3} \right)$$

Portanto

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+2)(x+3)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \ln \left| \frac{t+2}{t+3} \right| - \ln \left( \frac{2}{3} \right) \right] = \ln \left| \underbrace{\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{t+2}{t+3} \right)}_1 \right| - \ln \left( \frac{2}{3} \right) = \ln |1| - \ln \left( \frac{2}{3} \right) = -\ln \left( \frac{2}{3} \right)$$

**2ª Questão (1,0 ponto)** Use o teorema de comparação para determinar se a seguinte integral imprópria é convergente ou divergente.

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

**Solução**

Observe que  $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$  é uma integral imprópria de uma função não-limitada quando  $x \rightarrow 0^+$

Note-se que para  $x > 0$  temos que  $e^x > 1$  então  $\frac{1}{e^x} < 1$ . Podemos afirmar também que

$\sqrt{x} > 0$  para  $x > 0$ , portanto  $0 < \frac{1}{e^x \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$  para todo  $x > 0$ , em particular

$$0 < \frac{1}{e^x \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ para todo } 0 < x \leq 1. \quad (1)$$

Por outro lado  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$  é um caso particular do exemplo referencial “Se  $r < 1$ ,

então  $\int_0^b \frac{1}{x^r} dx$  é convergente”, neste caso  $r = 1/2 < 1$ , assim  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  é convergente, logo de

(1) e o Teste de Comparação para integrais impróprias resulta que  $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$  é convergente.

**3ª Questão (2,0 pontos)** Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região limitada por  $y = x^2 - 4x + 4$  e  $y = 1$  em torno do eixo  $Oy$ . Faça um esboço do sólido.

**Solução**

Observe que  $y = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ . Por outro lado fazendo a interseção de

$y = 1$  e  $y = (x - 2)^2$ , resulta que  $x = 1$  e  $x = 3$ . Desenhemos a Figura 2 mostrando a região e o eixo de rotação  $Oy$ . O esboço do sólido é mostrado na Figura 3.

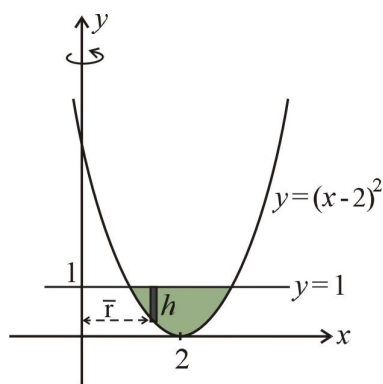


Figura 2

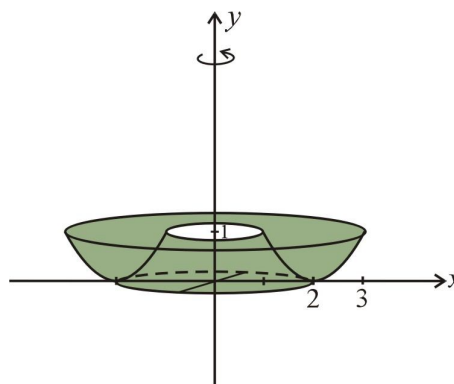


Figura 3

Identificamos a função altura da casca típica  $h(x)$  e o raio médio da casca típica  $\bar{r}(x)$  onde  $h(x) = 1 - (x-2)^2$  e  $\bar{r} = x$  para  $1 \leq x \leq 3$ . Note que  $0 \leq (x-2)^2 \leq 1$  para  $1 \leq x \leq 3$ , assim  $h(x) = 1 - (x-2)^2 \geq 0$  e  $\bar{r}(x) = x \geq 0$ .

O volume é dado pela fórmula  $V = 2\pi \int_a^b \bar{r}(x) h(x) dx$ . Assim, o volume é

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_1^3 x(1 - (x-2)^2) dx = 2\pi \int_1^3 x(1 - x^2 + 4x - 4) dx = 2\pi \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) dx \\ V &= 2\pi \left( -\frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = 2\pi \left[ \left( -\frac{3^4}{4} + 4\frac{3^3}{3} - 3\frac{3^2}{2} \right) - \left( -\frac{1^4}{4} + 4\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} \right) \right] \\ V &= 2\pi \left[ 3^3 \left( \frac{-9+16-6}{12} \right) + \left( \frac{3-16+18}{12} \right) \right] = 2\pi \left[ 27 \left( \frac{1}{12} \right) + \left( \frac{5}{12} \right) \right] = 16\pi/3 \text{ unidades de volume.} \end{aligned}$$

#### 4ª Questão (2,5 pontos)

- a) (1,5 ponto) Determine uma parametrização para a reta tangente à curva

$\alpha(t) = (5\cos 2t, -2\sin 2t)$  no ponto  $\alpha(\frac{\pi}{6})$ . Encontre também uma equação cartesiana da reta.

- b) (1,0 ponto) Calcule o comprimento da curva  $\beta(t) = (t, \frac{1}{3}(t^2 + 2)^{3/2})$  com  $t \in [0, 1]$ .

#### Solução

- a) Uma parametrização da reta tangente à curva no ponto  $\alpha(\frac{\pi}{6})$  é

$$r(\lambda) = \alpha\left(\frac{\pi}{6}\right) + \lambda \alpha'\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Calculando a função derivada de  $\alpha$  temos

$$\alpha'(t) = (-10\sin 2t, -4\cos 2t)$$

Calculando os vetores  $\alpha(\frac{\pi}{6})$  e  $\alpha'(\frac{\pi}{6})$  resulta

$$\alpha\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(5\cos 2\frac{\pi}{6}, -2\sin 2\frac{\pi}{6}\right) = \left(5\cos \frac{\pi}{3}, -2\sin \frac{\pi}{3}\right) = \left(5\left(\frac{1}{2}\right), -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(\frac{5}{2}, -\sqrt{3}\right)$$

$$\alpha'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-10\sin 2\frac{\pi}{6}, -4\cos 2\frac{\pi}{6}\right) = \left(-10\sin \frac{\pi}{3}, -4\cos \frac{\pi}{3}\right) = \left(-10\frac{\sqrt{3}}{2}, -4\left(\frac{1}{2}\right)\right) = (-5\sqrt{3}, -2)$$

Assim uma equação paramétrica da reta tangente  $l$  correspondente a esses vetores é

$$r(\lambda) = \left(\frac{5}{2}, -\sqrt{3}\right) + \lambda(-5\sqrt{3}, -2), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \text{ ou seja, } r(\lambda) = \left(\frac{5}{2} - 5\sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3} - 2\lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Para achar uma equação cartesiana da reta  $l$ , lembre-se que

$$r(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda)) = \left(\frac{5}{2} - 5\sqrt{3}\lambda, -\sqrt{3} - 2\lambda\right), \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e podemos encontrar uma equação}$$

cartesiana para a reta  $l$  eliminando o parâmetro  $\lambda$ .

Assim

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2} - 5\sqrt{3}\lambda \\ y = -\sqrt{3} - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{5}{2} = -5\sqrt{3}\lambda \\ \frac{y + \sqrt{3}}{-2} = \lambda \end{cases} \Rightarrow x - \frac{5}{2} = -5\sqrt{3}\left(\frac{y + \sqrt{3}}{-2}\right) \Rightarrow -2x + 5 = -5\sqrt{3}y - 15$$

$$\text{Finalmente obtemos a equação } 5\sqrt{3}y - 2x + 20 = 0$$

c)

Dada a curva  $\beta(t) = \left(t, \frac{1}{3}(t^2 + 2)^{3/2}\right)$  com  $t \in [0, 1]$ .

Temos que  $\beta'(t) = \left(1, \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(t^2 + 2)^{1/2} 2t\right) = (1, t(t^2 + 2)^{1/2})$ . Logo

$$|\beta'(t)| = |(1, t(t^2 + 2)^{1/2})| = \sqrt{1 + t^2(t^2 + 2)} = \sqrt{1 + t^4 + 2t^2} = \sqrt{(1 + t^2)^2} = |1 + t^2| = 1 + t^2$$

Portanto o comprimento da curva  $\beta(t) = \left(t, \frac{1}{3}(t^2 + 2)^{3/2}\right)$  no intervalo  $[0, 1]$  é

$$L = \int_0^1 |\beta'(t)| dt = \int_0^1 (1 + t^2) dt = \left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$