

2ª Avaliação Presencial de Números Complexos – 2010-2

Questão 1: (2,0 pts) Encontre os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $z = a + bi$ e

a) **(1,0 pt)** $\bar{z}(2 - i) + (z - (3 + i^{225})) = 2$.

b) **(1,0 pt)** $\bar{z}z - i^{58} - 5z = -5$

Solução: a) $(a - bi)(2 - i) + (a + bi - (3 + i)) = 2 \iff (3a + b - 3) + i(-a - b - 1) = 2 \iff$

$$3a + b - 3 = 2 \text{ e}$$

$$-a - b - 1 = 0.$$

Assim, da primeira equação obtemos $b = -3a + 5$, donde $-a + 3a - 5 - 1 = 0 \iff a = 3$ e $b = -4$. Portanto, $z = 3 - 4i$.

b) $a^2 + b^2 - 1 - 5a - 5bi = -5 \iff b = 0$ e $a^2 - 5a + 4 = 0 \iff a = 4$ ou $a = 1$. Assim, $z = 1$ ou $z = 4$.

Questão 2: (2,0 pts) Resolva no conjunto dos números complexos a equação $x^8 - 5x^4 + 4$.

Solução: Fazendo $y = x^4$ a equação se torna $y^2 - 5y + 4 = 0$, cujas soluções são $y = 1$ ou $y = 4$. Queremos, assim determinar em $\mathbb{C}$ as soluções de $x^4 = 1$ e $x^4 = 4$.

No primeiro caso temos

$$x_0 = 1,$$

$$x_1 = (\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) = i,$$

$$x_2 = (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -1$$

e

$$x_3 = (\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}) = -i$$

No segundo caso temos

$$x_0 = \sqrt[4]{4}$$

$$x_1 = \sqrt[4]{4}(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}) = \sqrt[4]{4}i$$

$$x_2 = \sqrt[4]{4}(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -\sqrt[4]{4} \text{ e}$$

$$x_3 = \sqrt[4]{4}(\cos \frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2}) = -\sqrt[4]{4}i.$$

Questão 3: (2,0 pts) Dados $z = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{89}$ e $w = 3(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$. Calcule $z + w^4$.

Solução: Denotando $x = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e dado que $\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ e $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$, segue que

$x = e^{-i\pi} = -1$. Obtemos, portanto que $z = x^{89} = -1$

Por outro lado, temos que $w^4 = 81e^{i\frac{2\pi}{3}}$, donde $w^4 = 81(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Assim, $z + w^4 = -1 + 81(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Questão 4 (2,0 pts) Determine os números complexos z situados no 3º quadrante do plano complexo (na forma polar) tais que $z^8 = -i$.

Solução: Primeiro devemos escrever i na forma polar. Como $|i| = 1$ e o argumento de $-i$ é $\frac{3\pi}{2}$, então $-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sen \frac{3\pi}{2}$.

Utilizando a 2ª fórmula de Moivre temos que

$$z = \cos(\frac{3\pi}{16} + \frac{2k\pi}{8}) + i \sen(\frac{3\pi}{16} + \frac{2k\pi}{8}), \text{ onde } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Mas, z está situado no 3º quadrante do plano complexo. E, por isso,

$$\begin{aligned} \pi &< \frac{3\pi}{16} + \frac{2k\pi}{8} < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{16\pi}{16} &< \frac{3\pi + 4k\pi}{16} < \frac{24\pi}{16} \end{aligned}$$

donde

$$16\pi < 3\pi + 4k\pi < 24\pi$$

Isto é, $16 < 4k + 3 < 24$ ou $\frac{13}{4} < k < \frac{21}{4}$. Logo, as soluções para k são 4 e 5. Portanto, a solução para $z^8 = i$ no 3º quadrante do plano complexo é

$$z_1 = \cos \frac{19\pi}{16} + i \sen \frac{19\pi}{16}$$

e

$$z_2 = \cos \frac{23\pi}{16} + i \sen \frac{23\pi}{16}$$

Questão 5 (2,0 pts) Determine o menor inteiro positivo n de modo que $(-\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})^n$ seja um número real.

Solução: Denotando $z = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, temos que $|z| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{3}$. Assim, $z = \sqrt{3}(-\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}) = \sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sen \frac{5\pi}{6})$.

Temos, portanto que $z^n = (\sqrt{3})^n (\cos \frac{n5\pi}{6} + i \sen \frac{n5\pi}{6})$, donde $z^n \in \mathbb{R} \iff \sen \frac{n5\pi}{6} = 0 \iff \frac{n5\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $5n = 6k$. Assim, o menor inteiro positivo para o qual z^n é real é $n = 6$.