Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Cálculo II – AD1 (2009/1) Gabarito

1ª Avaliação a Distância - Entrega da AD1 no Pólo ou postagem REGISTRADA com AR até o dia 18 de Março de 2009

Todas as respostas devem estar acompanhadas das justificativas, mesmo que não exista o que esta sendo pedido.

1ª Questão (2 pontos)

a) Faça um esboço da região R limitada pelas curvas

$x = e^{y}$ se $y \leq 0;$ $x = e^{-y}$ se $y \geq 0;$

$x = y^{2} - 1$ se $y \leq 0;$ $x = (e^{-1} + 1)y - 1$ se $y \geq 0;$

$y = -1.$

b) Calcule a área da região R .

Solução.

1ª Questão

a) A figura a seguir representa a região $R = R_1 \cup R_2$

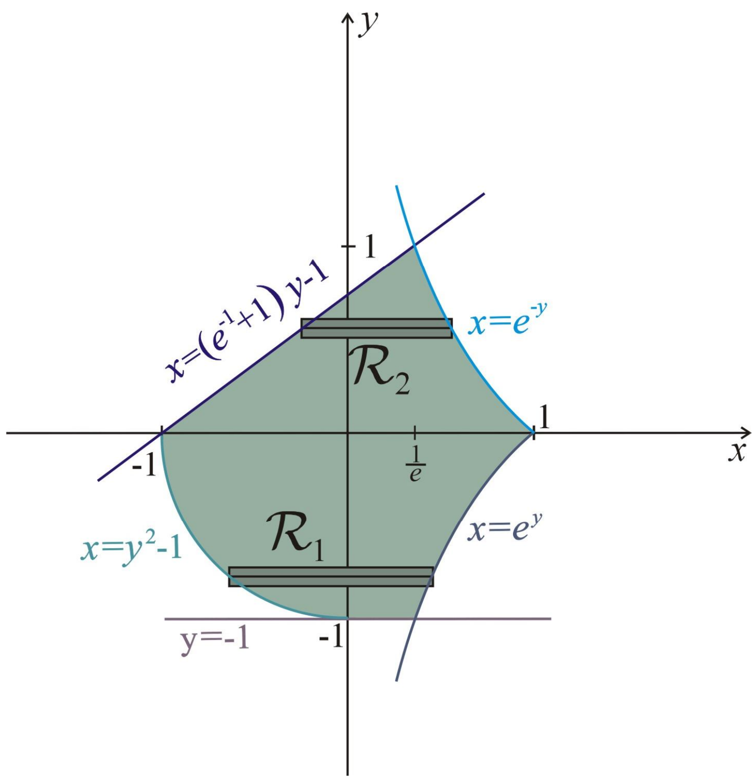

Figura 1

Precisamos da interseção da reta $x = (e^{-1} + 1)y - 1$ com a curva

$x = e^{-y}, y \geq 0$.

Igualando as equações temos

$$x = (\frac{1}{e}+1)y - 1 = e^{-y} \quad \Leftrightarrow \quad (\frac{1}{e}+1)y = \frac{1}{e}+1$$

Observe que uma solução obvia da equação anterior é $y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

As outras interseções são imediatas como pode ser visto na figura 1.

b) $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$

$$= \int_{-1}^{0} (e^{y} - (y^2 - 1))\,dy + \int_{0}^{1} (e^{-y} - [(e^{-1}+1)y - 1])\,dy$$

$$= \int_{-1}^{0} (e^{y} - y^2 + 1)\,dy + \int_{0}^{1} (e^{-y} - [(e^{-1}+1)y - 1])\,dy$$

$$= e^{y} - \frac{y^3}{3} + y \Big]_{-1}^{0} + (-e^{-y} - (e^{-1}+1)\frac{y^2}{2} + y)\Big]_{0}^{1}$$

$$= e^{0} - (e^{-1} - \frac{(-1)^3}{3} + (-1)) + (-e^{-1} - (e^{-1}+1)\frac{1}{2} + 1 + e^{0})$$

$$= 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{e} - (\frac{1}{e}+1)\frac{1}{2} + 1 + 1 = 4 - \frac{1}{3} - \frac{2}{e} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{24-2-3}{6} - \frac{4}{2e} - \frac{1}{2e} = \frac{19}{6} - \frac{5}{2e} = \frac{19e - 15}{6e}$$ unidades de área.

2ª Questão (2 pontos) Calcule a derivada:

a) $f(x) = 3^{(x^2+1)}\cos^3(3x) + x^{(x^2)}[arctg(3x)]^2$

b) $g(x) = \ln^2(x^4 + arsen(\sqrt{2x})) + \ln_2(\frac{e^{\left(2^x e^{(x^x)}\right)}}{(\sqrt{2})^{tg^2 4x}})$

Solução.

a) $f(x) = 3^{(x^2+1)}\cos^3(3x) + x^{(x^2)}[arctg(3x)]^2$

$$f'(x) = 3^{(x^2+1)}3\cos^2(3x)\,(-sen(3x))\,3 + \cos^3(3x)\;3^{(x^2+1)}(2x)\ln 3$$

$$+\, x^{(x^2)}\left\{2\,arctg(3x).\left[\frac{3}{1+(3x)^2}\right]\right\} + [arctg\,(3x)]^2\left\{x^{(x^2)}\right\}'$$

Vamos calcular $\left\{x^{(x^2)}\right\}'$

Seja $y = x^{(x^2)} \Rightarrow y = e^{\ln(x^{(x^2)})} = e^{x^2 \ln x}$

Então $y' = e^{x^2 \ln x}\left[x^2\dfrac{1}{x} + (\ln x)2x\right]$

$$= x^{x^2}[x + 2x\ln x] = x^{x^2}x[1+2\ln x] = x^{(x^2+1)}[1+2\ln x]$$

Assim $f\,'(x) = -9(3^{(x^2+1)})\cos^2(3x)\,sen(3x) + 2x\ln 3\,(3^{(x^2+1)})\cos^2(3x)$

$$+6x^{(x^2)}\frac{arctg(3x)}{1+9x^2} + x^{(x^2+1)}(1+2\ln x)[arctg\,(3x)]^2$$

b) $g(x) = \ln^2(x^4 + arsen(\sqrt{2x})) + \ln_2\left(\dfrac{e^{\left(2^x e^{(x^x)}\right)}}{(\sqrt{2})^{tg^2(4x)}}\right)$

Aplicando as propriedades dos logaritmos temos

$$g(x) = \ln^2(x^4 + arsen(\sqrt{2x})) + \ln_2(e^{\left(2^x e^{(x^x)}\right)}) - \ln_2(\sqrt{2})^{tg^2(4x)}$$

$$g(x) = \ln^2(x^4 + arsen(\sqrt{2x})) + \left(2^x e^{(x^x)}\right)\ln_2(e) - (tg^2(4x))\ln_2(2^{1/2})$$

$$g(x) = \ln^2(x^4 + arsen(\sqrt{2x})) + \left(2^x e^{(x^x)}\right)\ln_2(e) - (tg^2(4x))\frac{1}{2}\ln_2(2)$$

Usando o fato que $\ln_2(2) = 1$, e $\ln_2(e) = \dfrac{\ln e}{\ln 2} = \dfrac{1}{\ln 2}$ obtemos:

$$g(x) = \ln^2(x^4 + arsen(\sqrt{2x})) + \left(2^x e^{(x^x)}\right)\frac{1}{\ln 2} - (tg^2(4x))\frac{1}{2}$$

Derivando a função g temos

$$g'(x) = 2\ln(x^4 + arsen(\sqrt{2x})).\left(\frac{4x^3 + \dfrac{\frac{2}{2\sqrt{2x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}}}{x^4 + arsen(\sqrt{2x})}\right)$$

$$+\left((2^x)(e^{(x^x)})' + e^{(x^x)}(2^x)'\right)\frac{1}{\ln 2} - 4\,tg(4x)\sec^2(4x)$$

$$g'(x) = 2\ln(x^4 + arsen(\sqrt{2x})).\left(\frac{4x^3 + (\frac{1}{\sqrt{2x}\ \sqrt{1-2x}})}{x^4 + arsen(\sqrt{2x})}\right)$$

$$+\left((2^x)e^{(x^x)}(x^x)' + e^{(x^x)}2^x \ln 2\right)\frac{1}{\ln 2} - 4tg(4x)\sec^2(4x)$$

Assim

$$g'(x) = 2\ln(x^4 + arsen(\sqrt{2x})).\left(\frac{1 + 4x^3(\sqrt{2x(1-2x)})}{\sqrt{2x(1-2x)}(x^4 + arsen(\sqrt{2x}))}\right)$$

$$+\left((2^x)(e^{(x^x)}x^x(1+\ln x) + e^{(x^x)}2^x \ln 2\right)\frac{1}{\ln 2} - 4tg(4x)\sec^2(4x)$$

Ou seja,

$$g'(x) = 2\ln(x^4 + arsen(\sqrt{2x})).\left(\frac{1 + 4x^3(\sqrt{2x(1-2x)})}{\sqrt{2x(1-2x)}(x^4 + arsen(\sqrt{2x}))}\right)$$

$$+\frac{(2^x)e^{(x^x)}}{\ln 2}\left(x^x(1+\ln x) + \ln 2\right) - 4\,tg(4x)\sec^2(4x)$$

3ª Questão (4 pontos) Dada a função $f(x) = e^x - 3e^{-x} - 4x$, determine:

a) o domínio e a derivabilidade de *f*,
b) as assíntotas horizontais e verticais (se existirem) para o gráfico de *f*,
c) os intervalos em que *f* é crescente e os intervalos em que *f* é decrescente,
d) os pontos de extremos relativos e absolutos (se existirem),
e) os intervalos em que o gráfico de *f* é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de *f* é côncavo para cima,
f) os pontos de inflexão (se existirem),
g) um esboço do gráfico de *f* e a imagem de *f*.

Solução.

a) $Dom(f) = \mathbb{R}$.

Agora, observe que e^x , $-3e^{-x}$ e $-4x$ são funções deriváveis em $\mathbb{R}$, assim f é derivável em $\mathbb{R}$, pois é a soma finita de funções deriváveis em $\mathbb{R}$.

b) **Assíntotas verticais.**

Não existem, pois a função f é contínua em todo $\mathbb{R}$ (Note que derivabilidade implica continuidade)

Assíntotas horizontais.

Observe que se calculamos o limite diretamente chegamos à forma indeterminada $\infty - \infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - 3e^{-x} - 4x) = \lim_{x\to+\infty}(e^x - \frac{3}{e^x} - 4x) \to \infty - \infty .$$

Precisamos eliminar a indeterminação. De fato,

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - 3e^{-x} - 4x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x - 3e^{-x} - 4x}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{3}{xe^x} - 4\right)$$

Note que $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}\right) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{1}\right) = +\infty$, e $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{xe^x}\right) = 0$

Assim, $\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{3}{xe^x} - 4\right) = +\infty$

Analogamente, $\lim_{x\to-\infty}(e^x - 3e^{-x} - 4x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{e^x - 3e^{-x} - 4x}{x}\right) = -\infty$

Portanto, não existem assíntotas horizontais.

c) Os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente.

$$f'(x) = e^x + 3e^{-x} - 4 = e^x + \frac{3}{e^x} - 4 = \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x}$$

Igualando a zero a derivada temos $f'(x) = \frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^x} = 0$

Note que o denominador é sempre diferente de zero.

Na equação $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$, faça $e^x = z$, Logo

$z^2 - 4z + 3 = 0 \Leftrightarrow (z-3)(z-1) = 0$

$\Rightarrow (e^x - 3)(e^x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3 \\ e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0 \end{array} \right.$$

Números críticos $x = 0$ e $x = \ln 3$.

Assim utilizando a tabela de sinais para a derivada obtemos o seguinte quadro:

	0	$\ln 3$	
Sinal de e^x	$+$	$+$	$+$
Sinal de $(e^x - 1)$	$-$	$+$	$+$
Sinal de $(e^x - 3)$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Comporta-mento de f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Assim f é crescente em $(-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$ **e** f é decrescente em $(0, \ln 3)$

d) Máximos e mínimos relativos e absolutos (se existirem)

De (c) e o teste da primeira derivada podemos concluir que:

Em $x = 0$ existe máximo relativo e $f(0) = e^0 - \dfrac{3}{e^0} - 4(0) = 1 - 3 = -2$. Portanto $(0, -2)$ é ponto de máximo relativo.

Em $x = \ln 3$ existe um mínimo relativo e

$f(\ln 3) = e^{\ln 3} - \dfrac{3}{e^{\ln 3}} - 4(\ln 3) = 3 - \dfrac{3}{3} - 4\ln 3 = 2 - 4\ln 3$. Portanto $(\ln 3, 2 - 4\ln 3)$ é ponto de mínimo relativo.

Note que conforme vimos anteriormente $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, assim não existe mínimo nem máximo absoluto.

e) Os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima.

$f'(x) = e^x + 3e^{-x} - 4$. Daqui

$$f''(x) = e^x - 3e^{-x} = e^x - \frac{3}{e^x} = \frac{e^{2x} - 3}{e^x}$$

Igualando a zero a derivada segunda temos

$$\frac{e^{2x} - 3}{e^x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln 3}{2}$$

Utilizando a tabela de sinais para f'' obtemos

	$\frac{1}{2}\ln 3$	
Sinal de e^x	$+$	$+$
Sinal de $(e^{2x} - 3)$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$
Concavidade do gráfico de f	$\cap$	$\cup$

Logo o gráfico de f é côncavo para baixo em $(-\infty, \dfrac{\ln 3}{2})$ e o gráfico de f é côncavo para cima em $(\dfrac{\ln 3}{2}, +\infty)$.

f) Os pontos de inflexão (se existirem)

De (e) temos que existe mudança de concavidade em $x = \dfrac{\ln 3}{2}$ e por outro lado sabemos que existe $f\,'(\dfrac{\ln 3}{2})$ isto é, o gráfico de f tem reta tangente em $(\dfrac{\ln 3}{2},\ f\,(\dfrac{\ln 3}{2}))$ logo concluímos que $(\dfrac{\ln 3}{2},\ f\,(\dfrac{\ln 3}{2}))=(\dfrac{\ln 3}{2},-2\ln 3)$ é ponto de inflexão.

Com efeito, note que $f\,(\dfrac{\ln 3}{2}) = e^{\frac{\ln 3}{2}} - \dfrac{3}{e^{\frac{\ln 3}{2}}} - 4(\dfrac{\ln 3}{2}) = e^{\ln 3^{1/2}} - \dfrac{3}{e^{\ln 3^{1/2}}} - 2\ln 3$

$$= \sqrt{3} - \frac{3}{\sqrt{3}} - 2\ln 3 = \frac{3-3}{\sqrt{3}} - 2\ln 3 = -2\ln 3 .$$

g) Um esboço do gráfico de f e a imagem de f .

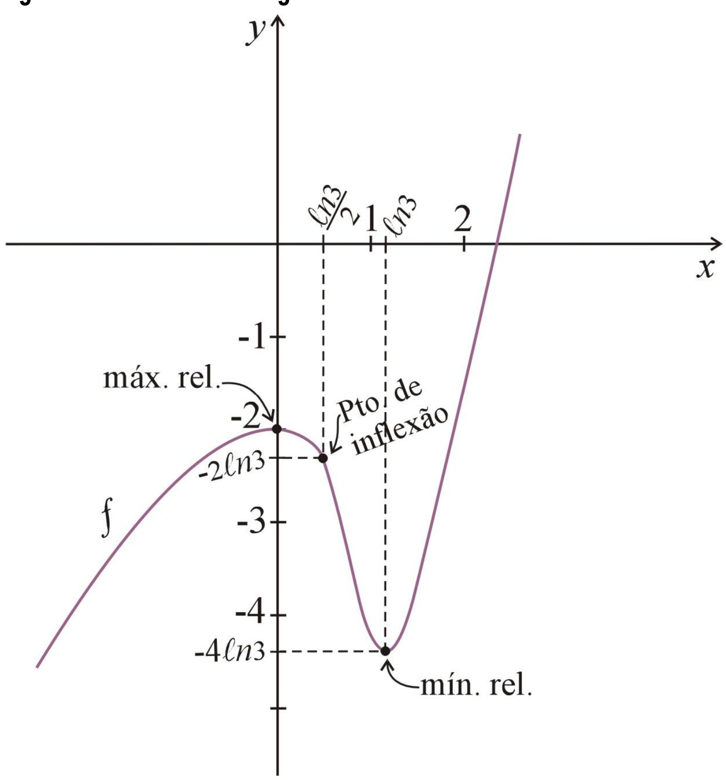

Figura 2

$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

4ª Questão (2 pontos) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável até a 2^a ordem. Suponha $g\,'(x)$ sempre positiva ou sempre negativa em $\mathbb{R}$ e seja h a função inversa de g . Considere

$F(x) = \displaystyle\int_a^{h(x)} g(t)dt$ onde a é constante

a) Mostre que F e $F\,'$ são funções deriváveis.

b) Verifique que $F''(x) = \dfrac{[g'(h(x)]^2 - xg''(h(x))}{[g'(h(x)]^3}$.

Solução.

a) Observe que as hipóteses dadas no exercício nos permitem utilizar o Teorema da Função Inversa, assim podemos afirmar que a função inversa h é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e que $h'(x) = \dfrac{1}{g'(h(x))}$. Note que pelas hipóteses dadas $g'(h(x)) \neq 0$ em $\mathbb{R}$

Seja $G(x) = \int_a^x g(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$. É claro que por hipótese g é derivável em $\mathbb{R}$ logo g é contínua em $\mathbb{R}$. Então pela primeira forma do teorema fundamental do cálculo e o exemplo 3.2 do livro texto, resulta que $G(x) = \int_a^x g(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$G'(x) = g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado é claro que $(G \circ h)(x) = G(h(x)) = \int_a^{h(x)} g(t)dt = F(x)$.

Como G e h são deriváveis em $\mathbb{R}$, a regra da cadeia nos garante que F é uma função derivável em $\mathbb{R}$ e

$$F'(x) = (G \circ h)'(x) = G'(h(x))h'(x) = g(h(x))h'(x)$$

Como g e h são funções inversas então $(g \circ h)(x) = x$, então

$$F'(x) = xh'(x) = x.\frac{1}{g'(h(x))} = \frac{x}{g'(h(x))}.$$

Note que F' é o quociente da função identidade $I(x) = x$ e da função $g'(h(x)) = (g' \circ h)(x) \neq 0$.

È claro que $I(x) = x$ é uma função derivável sobre $\mathbb{R}$. Resta provar que $(g' \circ h)(x)$ é também derivável. Com efeito, sabemos que g' é derivável em $\mathbb{R}$ pois por hipótese g tem derivada até a segunda ordem e h é derivável como visto anteriormente. Assim como a composição de duas funções deriváveis é derivável então $(g' \circ h)(x)$ é derivável, logo pela regra da cadeia temos $(g' \circ h)'(x) = g''(h(x))h'(x)$. Portanto F' resulta derivável.

b) Usando a regra do quociente temos que

$$F''(x) = \left(\frac{x}{g'(h(x))}\right)' = \frac{[g'(h(x))]1 - xg''(h(x))h'(x)}{[g'(h(x))]^2}$$

Substituindo o valor de $h'(x)$ obtido em (a), na expressão da direita obtemos,

$$F''(x) = \frac{g'(h(x)) - xg''(h(x)).\dfrac{1}{g'(h(x))}}{[g'(h(x))]^2} = \frac{g'(h(x)) - xg''(h(x))}{[g'(h(x))]^3}$$