Cálculo II – AD2 (2009/2) Gabarito

1ª Questão (2,5 pontos) Calcule:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{5+12x-9x^2}}\,dx$. (**Aula 25 do caderno didático, exercício proposto nº 15)** (1,0 ponto)

b) $\int \frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$. (1,5 pontos)

Solução

a) $\int \frac{x}{\sqrt{5+12x-9x^2}}\,dx$

Usando a técnica de completar quadrados temos que

$5+12x-9x^2 = 5+4-(9x^2-12x+4) = 9-(3x-2)^2$

Logo

$$\int \frac{x}{\sqrt{5+12x-9x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{9-(3x-2)^2}}\,dx$$

Façamos a substituição $u = 3x-2 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{3}(u+2) \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{3}du$

Logo

$$\int \frac{x}{\sqrt{9-(3x-2)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}(u+2)}{\sqrt{9-u^2}}\,du = \frac{1}{9}\int \frac{(u+2)}{\sqrt{9-u^2}}\,du$$

$$= \underbrace{\frac{1}{9}\int \frac{u}{\sqrt{9-u^2}}\,du}_{(1)} + \underbrace{\frac{2}{9}\int \frac{1}{\sqrt{9-u^2}}\,du}_{(2)} \qquad (*)$$

Observe que podemos integrar imediatamente (1), se fazemos uma substituição simples do tipo

$z = 9-u^2 \quad \Rightarrow \quad dz = -2udu \quad \Rightarrow \quad -\frac{dz}{2} = udu$

Assim

$$\frac{1}{9}\int \frac{u}{\sqrt{9-u^2}}\,du = \frac{1}{9}\int (9-u^2)^{-\frac{1}{2}}\,u\,du = -\frac{1}{9}\int z^{-\frac{1}{2}}\,\frac{dz}{2} = -\frac{1}{18}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1 = -\frac{1}{9}(9-u^2)^{\frac{1}{2}} + C_1$$

$$= -\frac{1}{9}(5+12x-9x^2)^{\frac{1}{2}} + C_1 \qquad (1)$$

Por outro lado, note-se que uma das regras básicas de integração $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right)+C$, é aplicável, logo

$$\frac{2}{9}\int \frac{du}{\sqrt{9-u^2}} = \frac{2}{9}\text{arcsen}\left(\frac{u}{3}\right)+C_2 = \frac{2}{9}\text{arcsen}\left(\frac{3x-2}{3}\right)+C_2 \qquad (2)$$

Substituindo (1) e (2) em (*) temos

$$\int \frac{x}{\sqrt{5+12x-9x^2}}dx = -\frac{1}{9}(5+12x-9x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{9}\text{arcsen}\left(\frac{3x-2}{3}\right)+C$$

b) $\int \frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}dx$

A expansão em frações parciais tem a seguinte forma

$$\frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

Multiplicando a igualdade por $(x^2+1)^2$, temos

$$\begin{aligned} x^3+4x^2-4x-1 &= (Ax+B)(x^2+1)+Cx+D \\ &= Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D \\ &= Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D) \end{aligned}$$

Igualando os coeficientes obtemos o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} A=1 \\ B=4 \\ A+C=-4 \\ B+D=-1 \end{cases}$$

A solução desse sistema é $A=1,\ B=4,\ \ C=-5$ e $D=-5.$

Portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}dx &= \int \frac{(x+4)}{(x^2+1)}dx - \int \frac{(5x+5)}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \int \frac{x}{(x^2+1)}dx + 4\int \frac{1}{(x^2+1)}dx - 5\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx - 5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)}dx + 4\,\text{arctg}\, x - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx - 5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\,\text{arctg}\, x - \underbrace{\frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx}_{(5)} - \underbrace{5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx}_{(6)} \qquad (**) \end{aligned}$$

$$\frac{5}{2}\int \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{5}{2}\int (x^2+1)^{-2}\,2x\,dx = \frac{5}{2}\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + C_1 = -\frac{5}{2(x^2+1)} + C_1 \qquad (5)$$

Vamos calcular

$$5\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$$

Primeiro note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que estamos no caso de integrais que tem termos da forma $\sqrt{a^2+x^2}$ com $a=1$.

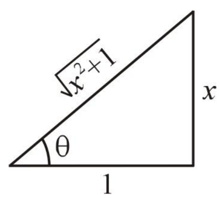

Figura 1

Do triângulo retângulo associado mostrado na Figura 1, tem-se:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{x}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = \operatorname{tg}\theta \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{cases}$$

Também, $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1} \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sec\theta$

$$\Rightarrow x^2+1 = \sec^2\theta$$

Assim,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{(\sec^2\theta)^2} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta} = \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \int \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int (\frac{1+\cos 2\theta}{2})\, d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta + \mathrm{C}$$

$$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + \mathrm{C} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}) + \mathrm{C}$$

Portanto

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + \frac{1}{2}(\frac{x}{x^2+1}) + \mathrm{C}$$

Logo $$5\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x) + \frac{5}{2}(\frac{x}{x^2+1}) + \mathrm{C} \qquad (6)$$

Substituindo (5) e (6) em (**) resulta

$$\int \frac{x^3+4x^2-4x-1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4\operatorname{arctg} x + \frac{5}{2(x^2+1)} - \frac{5}{2}\operatorname{arctg}(x) - \frac{5}{2}(\frac{x}{x^2+1}) + \mathrm{C}$$

2ª Questão (2,0 pontos)

Mostre que a integral imprópria $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ é convergente, mas a integral imprópria $\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ é divergente.

Solução

- Vamos mostrar que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ é convergente

Lembremos que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{\pi}^{t} \frac{\cos x}{x}\,dx$ (7)

Por outro lado usando integração por partes temos que

$$\int_{\pi}^{t} \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_{\pi}^{t} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u}\underbrace{\cos x\,dx}_{dv} = \frac{1}{x}(senx)\Big]_{\pi}^{t} + \int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{t}(\operatorname{sen} t) - \frac{1}{\pi}(\underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{0}) + \int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$$

Logo

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\pi}^{t} \frac{\cos x}{x}\,dx = \underbrace{\lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{1}{t}}_{\searrow 0} (\underbrace{\operatorname{sen} t}_{\text{funçao limitada}})}_{=0\ (Corol.do T.do Confronto)} + \lim_{t\to\infty}\int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx \qquad (8)$$

Substituindo (8) em (7) obtemos

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx \qquad (9)$$

Afirmamos que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ é convergente

De fato observe que $0 \le |\operatorname{sen} x| \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $0 \le \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| = \frac{|\operatorname{sen} x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$, para todo $x \in [\pi, +\infty)$

E pelos exemplos referenciais sabemos que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente , assim pelo critério de comparação resulta que $\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| dx$ é convergente, (10)

De (10) e da propriedade dada no Exemplo 27.6 do caderno didático resulta que

$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ é convergente (11)

Assim, de (9) e (11) podemos afirmar que $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ é convergente

- Mostraremos que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ é divergente

Sabemos que $0 \le |\cos x| \le 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, multiplicando a expressão anterior por $0 \le |\cos x|$ temos

$0 \le |\cos x||\cos x| \le |\cos x|$, logo $0 \le \underbrace{|\cos x|^2}_{\cos^2 x} \le |\cos x|$, assim $0 \le \cos^2 x \le |\cos x|$

Portanto $0 \le \dfrac{\cos^2 x}{x} \le \dfrac{|\cos x|}{x} = \left|\dfrac{\cos x}{x}\right|$ para todo $x \in [\pi, +\infty)$. (12)

Basta mostrar então que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx$ diverge, assim pela desigualdade dada em (12) e o critério de comparação poderemos concluir que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx$ diverge.

Lembremos que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{\pi}^{t} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx$ (13)

Por outro lado $\displaystyle\int_{\pi}^{t} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx = \int_{\pi}^{t} \frac{1}{x}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$ (14)

Utilizando integração por partes temos que

$$\int_{\pi}^{t} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u}\underbrace{\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx}_{dv} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\right)\Bigg]_{\pi}^{t} + \int_{\pi}^{t} \left(\frac{1}{2x} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4t} - \frac{1}{2} - \frac{\overbrace{\operatorname{sen} 2\pi}^{0}}{4\pi} + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{t} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} 2x}{(2x)^2}\, dx$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2t}{4t} + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{t} \frac{1}{x}\, dx + \int_{\pi}^{t} \frac{\operatorname{sen} 2x}{(2x)^2}\, dx \qquad (15)$$

Substituindo (15) em (14) e tomando limite quando $t \to +\infty$ obtemos

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{\pi}^{t} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx = \underbrace{\lim_{t\to+\infty} \underbrace{\frac{1}{4t}}_{\searrow 0} \underbrace{\operatorname{sen} 2t}_{\text{limitada}}}_{=0\,(\text{Corol. do T. do confronto})} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x}}_{\text{diverge}} + \underbrace{\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{(2x)^2}\, dx}_{\text{converge(Veja (9)-(10), comparar com } \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{(2x)^2})} \qquad (16)$$

Como pelos exemplos referenciais sabemos que uma das integrais impróprias no segundo membro de (16) diverge, podemos concluir de (16) e (13) que

$$\int_{\pi}^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x}\right| dx \text{ diverge.}$$

3ª Questão (1,5 ponto)

a) Verifique se a integral imprópria $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{arctg} z\, dz$ converge ou diverge (1,0 ponto)

b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{0}^{x} \operatorname{arctg} z\, dz$. (0,5 ponto)

Solução

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} z\, dz = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \operatorname{arctg} z\, dz$ (17)

Por outro lado usando integração por partes temos que

$$\int_0^t \underbrace{\operatorname{arctg} z}_{u}\ \underbrace{dz}_{dv} = z\operatorname{arctg} z\Big]_0^t - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2z\,dz}{1+z^2} = t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+z^2)\Big]_0^t = t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \qquad (18)$$

Logo

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \operatorname{arctg} z\, dz = \lim_{t\to+\infty}[t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)]\ . \qquad (19)$$

Observe que este último limite é uma forma indeterminada do tipo $\infty-\infty$, assim para eliminar a indeterminação, observe que

$$\lim_{t\to+\infty}[t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)] = \lim_{t\to+\infty} t\ [\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{t}] \qquad (20)$$

Como

$$\lim_{t\to+\infty}[\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{t}] = \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg} t - \underbrace{\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{t}}_{\text{forma indeterm. } \frac{\infty}{\infty}} \overset{L'H}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1} \overset{L'H}{=} \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}(0) = \frac{\pi}{2}$$

Segue que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t\ [\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\frac{\ln(1+t^2)}{t}] = +\infty$ (21)

Substituindo (21) em (20); (20) em (19) e (19 em (17) resulta que

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} z\, dz$ diverge.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arctg} z\, dz$

Observemos que da parte (a) sabemos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} z\, dz$ diverge, logo podemos afirmar que quando $x\to+\infty$ a expressão $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arctg} z\, dz$ é uma forma indeterminada do tipo $0.\infty$. Lembremos que para aplicar a regra de L'Hôpital precisamos de uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Assim

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \operatorname{arctg} z\, dz = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x \operatorname{arctg} z\, dz}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{d}{dx}(\int_0^x \operatorname{arctg} z\, dz)}{1} \overset{1^a f^a TFC}{=} \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

4ª Questão (4,0 pontos) – Determine os volumes dos sólidos obtidos com a rotação da região, <u>no primeiro quadrante</u>, limitada por $x = y - y^3$, $x=1$, $y=0$ e $y=1$ em torno dos eixos dados:

a) do eixo Ox
b) do eixo Oy

c) da reta $x = 1$
d) da reta $y = 1$.

Em cada caso esboce a região mostrando a casca ou o disco típico e faça um esboço do sólido correspondente.

Solução

a) do eixo Ox

O método apropriado aqui é o das cascas cilíndricas
Esboço da região mostrando a casca típica:

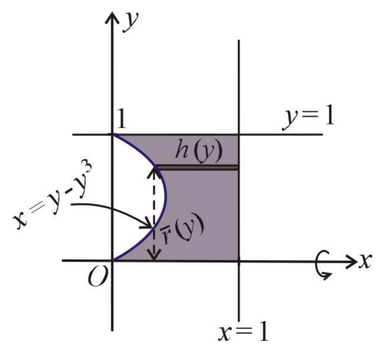

Figura 2

Neste caso $\bar{r}(y) = y$ e $h(y) = 1 - (y - y^3)$
Assim,

$$V = 2\pi \int_0^1 \bar{r}(y)\, h(y) dy = 2\pi \int_0^1 y(1 - (y - y^3)) dy$$

$$V = 2\pi \int_0^1 y(1 - y + y^3) dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^2 + y^4) dy = 2\pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right) \Big]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$V = 2\pi \dfrac{(15 - 10 + 6)}{30} = \dfrac{11}{15}\pi$ unidades de volume.

Esboço do sólido de revolução:

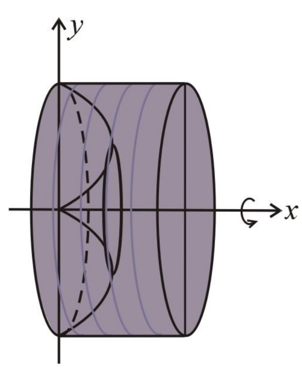

Figura 3

b) do eixo Oy

O método apropriado neste caso é o dos discos ou arruelas.
Esboço da região mostrando a arruela típica:

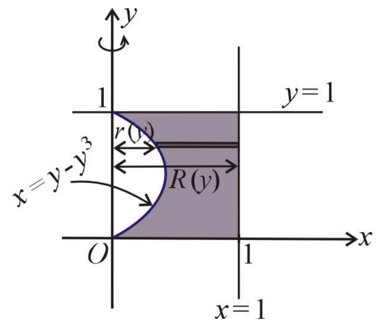

Figura 4

Note-se que $R(y)=1,\ r(y)=(y-y^3)$

$$V=\pi\int_0^1 [(R(y))^2-(r(y))^2]dy=\pi\int_0^1 [1-(y-y^3)^2]dy=\pi\int_0^1 [1-(y^2-2y^4+y^6)]dy$$

$$V=\pi\int_0^1 [1-y^2+2y^4-y^6]dy=\pi[y-\frac{y^3}{3}+2\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}]_0^1=\pi[1-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\frac{1}{7}]=\pi\frac{(105-35+42-15)}{105}$$

$V=\pi\dfrac{(105-35+42-15)}{105}=\dfrac{97}{105}\pi$ unidades de volume.

Esboço do sólido de revolução:

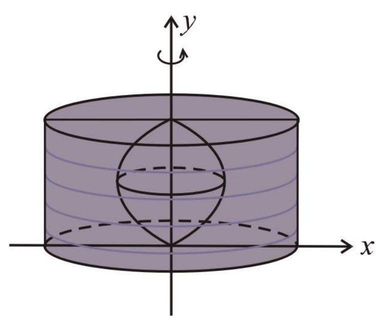

Figura 5

c) da reta $x=1$

O método apropriado neste caso é o dos discos
Esboço da região mostrando o disco típico:

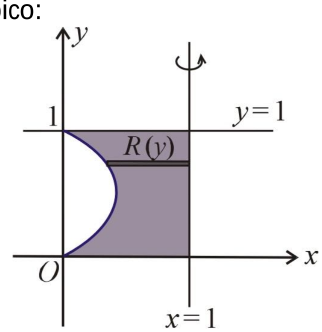

Figura 6

Note-se que $R(y)=1-(y-y^3)$

$$V=\pi\int_0^1 [R(y)]^2\,dy=\pi\int_0^1 [1-(y-y^3)]^2\,dy=\pi\int_0^1 [1-y+y^3]^2\,dy$$

$$V=\pi\int_0^1 [1-2y+y^2+2y^3-2y^4+y^6]dy=\pi\left(y-2\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+2\frac{y^4}{4}-2\frac{y^5}{5}+\frac{y^7}{7}\right)\Bigg]_0^1$$

$$V=\pi(1-1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7})=\pi(\frac{70+105-84+30}{210})=\frac{121}{210}\pi$$ unidades de volume.

Esboço do sólido de revolução:

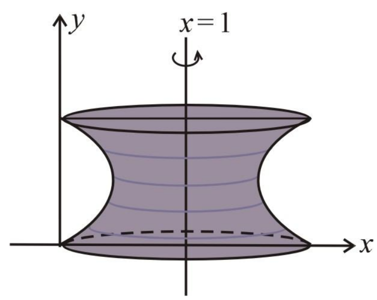

Figura 7

d) da reta $y=1$.

O método apropriado é o das cascas cilíndricas
Esboço da região mostrando a casca típica:

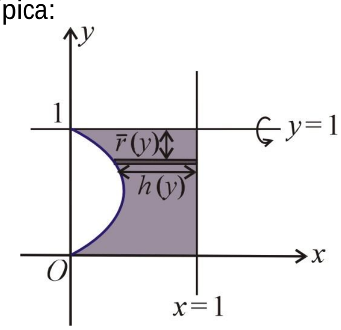

Figura 8

Neste caso $\bar{r}(y)=1-y$ e $h(y)=1-(y-y^3)$
Assim,

$$V=2\pi\int_0^1 \bar{r}(y)\,h(y)dy=2\pi\int_0^1 (1-y)(1-(y-y^3))dy$$

$$V=2\pi\int_0^1 (1-(y-y^3))dy-\underbrace{2\pi\int_0^1 y(1-(y-y^3))dy}_{\frac{11}{15}\pi\quad (veja\ a\ parte\ (a))}$$

$$V = 2\pi\int_0^1 (1 - y + y^3)dy - \frac{11}{15}\pi$$

$$V = 2\pi\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right)\Big]_0^1 - \frac{11}{15}\pi = 2\pi\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{11}{15}\pi = 2\pi\left(\frac{4-2+1}{4}\right) - \frac{11}{15}\pi$$

$V = \frac{3}{2}\pi - \frac{11}{15}\pi = \frac{45-22}{30}\pi = \frac{23}{30}\pi$ unidades de volume.

Esboço do sólido de revolução: