AP3- CÁLCULO II- 2009/2 (Gabarito)

1ª Questão (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

a) (1,5 ponto) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx$ **b)** (1,5 ponto) $\displaystyle\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1}$

Solução

a) Faça a substituição $u = 1+4x^2 \quad \Rightarrow du = 8x\,dx \quad \Rightarrow x\,dx = \dfrac{du}{8}$

Mudando os limites de integração, se $x=0 \quad \Rightarrow u=1$ e se $x=\sqrt{2} \quad \Rightarrow u = 1+4(2) = 9$

Assim

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_1^9 \sqrt{u}\,\frac{du}{8} = \frac{2}{8}\frac{u^{3/2}}{3}\Bigg]_1^9 = \frac{1}{12}(3^2)^{3/2} - \frac{1}{12} = \frac{26}{12} = \frac{13}{6}.$$

b) $$\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+1} = \int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}} = \int \frac{(x+1)\,dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Faça a substituição $u = x+\dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow x = u-\dfrac{1}{2}$ e $du = dx$

Logo

$$\int \frac{(x+1)}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \int \frac{(u-\frac{1}{2}+1)}{u^2+\frac{3}{4}}du = \int \frac{(u+\frac{1}{2})}{u^2+\frac{3}{4}}du = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+\frac{3}{4}}du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+\frac{3}{4}) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln(u^2+\frac{3}{4}) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2u}{\sqrt{3}}) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}[\frac{\sqrt{3}}{3}(2x+1)] + C$$

2ª Questão (3,0 pontos).

Seja R a região entre o gráfico de $f(x) = e^{-x/2}$ e o eixo Ox, $x \geq 0$.

a) (0,5 ponto) Esboce R

b) (1,0 ponto) Calcule a área de R.

c) (1,5 ponto) Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da região R em torno do eixo Ox. Faça um esboço do sólido.

Solução

a) Esboço da região R

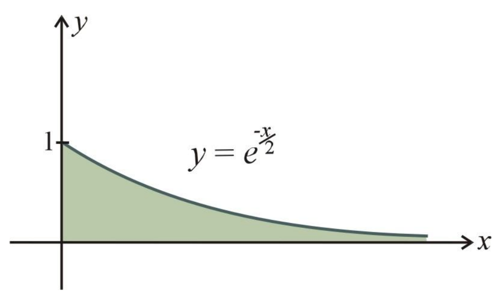

Figura 1

b)

$$A(R) = \int_0^{+\infty} e^{-x/2}\,dx = \lim_{t\to+\infty}(-2)\int_0^t e^{-x/2}(-\frac{1}{2})\,dx = \lim_{t\to+\infty}(-2)\,e^{-x/2}\Big]_0^t = \lim_{t\to+\infty}((-2)e^{-t/2} - (-2)e^0)$$

Assim,

$A(R) = \underbrace{\lim_{t\to+\infty}(-2)\frac{1}{e^{t/2}}}_{0} + 2 = 2$ unidades de área.

c)

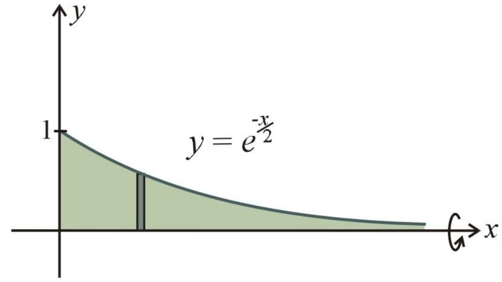

Figura 2

$$V(R)=\pi\int_0^{+\infty}(e^{-x/2})^2dx=\pi\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}dx=\pi\lim_{t\to+\infty}(-1)\int_0^t e^{-x}(-1)dx=\pi\lim_{t\to+\infty}(-1)e^{-x}\Big]_0^t$$

$$V(R)=\pi(\lim_{t\to+\infty}(-1)e^{-t}+e^{-0})=\pi(\underbrace{\lim_{t\to+\infty}((-1)\frac{1}{e^t})}_{0}+1)=\pi$$ unidades de volume.

O esboço do sólido aparece na Figura 3

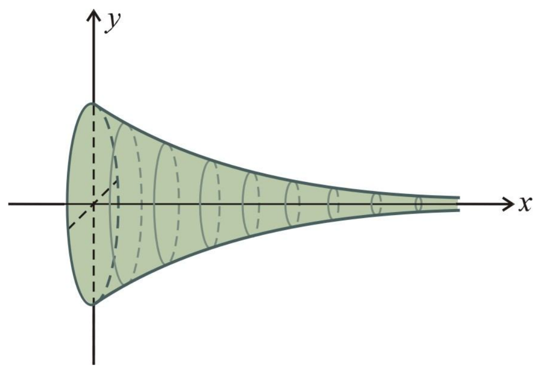

Figura 3

3ª Questão (1,0 ponto) Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln x}dx$$

Solução

Note-se que para $x\geq 2$ temos que $\ln x\geq \ln 2>0$ então $0<\frac{1}{\ln x}\leq\frac{1}{\ln 2}$. Podemos afirmar também que

$$0<\frac{1}{x^2\ln x}\leq\frac{1}{x^2\ln 2} \quad \text{para } x\geq 2, \qquad (1)$$

Por outro lado $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ é um caso particular do exemplo referencial "Se $r>1$, então $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^r}dx$ é convergente", neste caso $r=2>1$, assim $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ é convergente, portanto $\frac{1}{\ln 2}\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ é convergente, logo de (1) e o Teste de Comparação para integrais impróprias resulta que $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln x}dx$ é convergente.

4ª Questão (3,0 pontos)

a) (1,5 ponto) Encontre $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{e^t-1}{\ln(1+t)}, \dfrac{1-e^t}{te^t+(e^t-1)}\right)$ se existir.

b) (1,5 ponto) Calcule a integral da seguinte função vetorial $\alpha(t)=\left(t\,e^t, \dfrac{t}{t^2+1}\right)$, sobre o intervalo $[0,1]$.

Solução

a)

Lembre-se que

- $$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{\ln(1+t)} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{e^t}{\frac{1}{1+t}}=\lim_{t\to 0}(1+t)e^t=1$$

e

- $$\lim_{t\to 0}\frac{1-e^t}{te^t+(e^t-1)}= \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-e^t}{te^t+e^t+e^t}=-\frac{1}{2}$$

Portanto $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{e^t-1}{\ln(1+t)}, \dfrac{1-e^t}{te^t+(e^t-1)}\right)=\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$

b)

$\displaystyle\int_0^1 \alpha(t)\,dt=\left(\int_0^1 t\,e^t\,dt, \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt\right)$. Vamos calcular cada uma das integrais.

Usando integração por partes temos que

- $$\int_0^1 t\,e^t\,dt=t\,e^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt=e^1-e^t\Big]_0^1=e-e+e^0=1$$

Para calcular a segunda integral observamos que

- $$\int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big]_0^1=\frac{1}{2}(\ln(1^2+1)-\ln(1))=\frac{1}{2}\ln 2$$

Portanto

$$\int_0^1 \alpha(t)\,dt=\left(1,\frac{1}{2}\ln 2\right)=\vec{i}+\frac{1}{2}\ln 2\,\vec{j}\,.$$